Olasılık Kuramı

Fare Peyniri Ne Kadar Zamanda Bulur?

Ali Burak İhsan

Bir farenin önünde üç delik var. Deliklerden birinde, hangisinde olduğu belli değil, bir peynir var. Fare deliklerden rastgele birine girip deliği kolaçan ediyor. Eğer peyniri bulursa, ne âlâ, afiyetle kursağına geçiriyor. Eğer peyniri bulamazsa delikten çıkıp bir başka deliğe giriyor. Yalnız bu fare çok unutkan. Hangi delikten çıktığını hep unutuyor, dolayısıyla farenin birkaç kez üstüste aynı deliğe girme olasılığı da var.

Fare, deliklerden birincisini 2 dakikada kolaçan edebiliyor, ikincisini 3 dakikada, üçüncüsünü ise 4 dakikada.

Soru şu: *Fare ortalama ne kadar zamanda peyniri bulur*?

Peynirin belli bir delikte olma olasılığının 1/3 ve farenin de belli bir deliğe girme olasılığının 1/3 olduğunu varsayacağız. Yani ne peynir ne de fare bir deliği bir başka deliğe tercih ediyor...

Önce peynirin birinci delikte olduğunu varsayalım. Farenin üç seçeneği var.

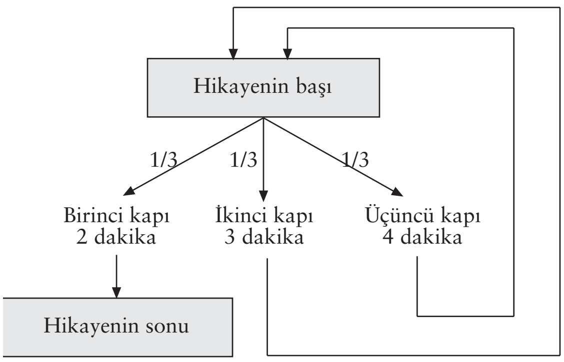
a) 1/3 olasılıkla şansı yaver gidecek ve birinci deliğe girip 2 dakika içinde peyniri bulacak.

b) 1/3 olasılıkla ikinci deliğe girecek ve 3 dakika sonra peyniri bulamadan çıkacak.

c) 1/3 olasılıkla üçüncü deliğe girecek ve 4 dakika sonra peyniri bulamadan çıkacak.

Birinci durumda hikâye 2 dakikada sona eriyor ama diğer iki durumda aynı hikâyenin ta en başına dönüyoruz. Hikâyenin akışını şöyle gösterebiliriz:

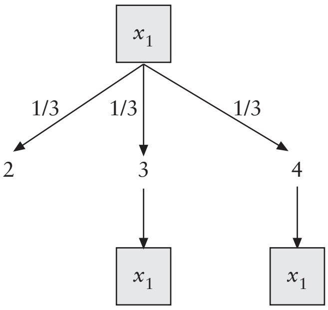
Görüldüğü gibi, en az 1/3 olasılıkla fare peyniri 2 dakikada bulacak. Ama 2/3 olasılıkla da bulamayacak: 1/3 olasılıkla 3 dakika sonra, 1/3 olasılıkla 4 dakika sonra hikâyenin başına dönecek.



Peynir birinci delikte olduğunda bulmak istediğimiz ortalama süreye x_1 diyelim. Yani fare bu durumda ortalama x_1 dakika sonra peyniri bulabilsin. Demek ki hikâyenin ortalama x_1 dakika sonra sona ereceğini varsayıyoruz.

Yukardaki şema dakikalara vurulduğunda şu hale gelir:

Hikâye 1/3 olasılıkla 2 dakikada sona erecek.



Bu durum, yukardaki şemada en soldaki okla gösterilmiş.

Hikâye 1/3 olasılıkla $3 + x_1$ dakikada sona erecek. Bu durum, yukardaki şemada ortadaki okla gösterilmiş.

Hikâye 1/3 olasılıkla $4 + x_1$ dakikada sona erecek. Bu durum, yukardaki şemada en sağdaki okla gösterilmiş.

Demek ki hikâye, ortalama

$$\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}(3+x_1)+\frac{1}{3}(4+x_1)$$

dakika sonra sona erecek. Demek ki bu sayı x_1'in kendisine eşit:

$$x_1=\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}(3+x_1)+\frac{1}{3}(4+x_1).$$

Bu denklemi çözersek, $x_1 = 9$ buluruz.

Bu, peynir birinci delikte olduğundaki ortalama. Bu yüzden bu ortalama zamana x_1 diyelim: $x_1 = 9$.

Peynir ikinci delikte olduğu durumdaki ortalama zamanı bulalım. Aynen yukardaki gibi düşünürsek,

$$x_2=\frac{1}{3}(2+x_2)+\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{3}(4+x_2)$$

ve

$$x_3 = \frac{1}{3}(2+x_3) + \frac{1}{3}(3+x_3) + \frac{1}{3}\times 4$$

buluruz. Bunların da çözümü $x_2 = x_3 = 9$ çıkar.

Demek ki, 1/3 olasılıkla peynir birinci delikte olacak ve fare peyniri 9 dakikada bulacak, 1/3 olasılıkla peynir ikinci delikte olacak ve fare peyniri 9 dakikada bulacak, 1/3 olasılıkla peynir üçüncü delikte olacak ve fare peyniri 9 dakikada bulacak.

Sonuçta fare peyniri ortalama

$$\frac{1}{3}\times 9 + \frac{1}{3}\times 9 + \frac{1}{3}\times 9 = 9$$

dakikada bulacaktır.

Sonucu bulduk bulmasına da, sonucun 2 + 3 + 4 olduğu dikkatinizi çekti mi? Bu sayı (9) farenin delikleri kolaçan etmek için geçirmesi gerektiği sürelerin (2, 3 ve 4'ün) toplamı... Bu bir rastlantı mı? Bunun bir rastlantı olup olmadığını anlamak için soruyu genelleştirebiliriz, birazdan da bunu yapacağız. Ama önce bir başka soruyu yanıtlamaya çalışalım:

Ortalama Deneme Sayısı. *Fare ortalama kaç denemede peynirin olduğu deliği bulur*?

Peynirin birinci delikte olduğunu varsayalım.

O zaman fare 1/3 olasılıkla ilk önce bu deliğe girecek ve peyniri 1 hamlede bulacaktır.

Farenin peyniri 2 hamlede bulması için, farenin ilk hamlesinde peyniri bulamaması (olasılığı 2/3) ama ikinci hamlesinde peyniri bulması gerekir (olasılığı 1/3). Demek ki fare

$$(2/3) \times (1/3)$$

olasılıkla peyniri 2 hamlede bulacaktır.

Farenin peyniri i-inci hamlede bulması için farenin ilk $i - 1$ hamlede yanlış seçim yapmış olması gerekir (olasılığı $(2/3)^{i-1}$) ve i-inci hamlede doğru seçim yapmış olması gerekir (olasılığı 1/3). Demek ki fare

$$(2/3)^{i-1} \times (1/3)$$

olasılıkla peyniri i hamlede bulacaktır.

Şimdi $i \times (2/3)^{i-1} \times (1/3)$ sayılarını toplarsak ortalama hamle sayısını buluruz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}.$$

Soldaki sonsuz toplamı hesaplamalıyız... Oradaki i olmasa, bu toplam geometrik bir serinin toplamı olur ve sonucu rahatlıkla bulabiliriz (1/(1–2/3) = 3 çıkar) ama ne yazık ki toplamda can sıkıcı bir i var. Bir sonraki gri karede bu sonsuz toplamı hesaplayacağız ve 9 bulacağız. Demek ki bu durumda, fare ortalama 3 denemede doğru deliği bulur.

Teorem. *Eğer* $-1 < x < 1$ *ise,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olur.

Kanıt : $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ eşitliğini biliyoruz.

Her iki tarafın da türevini alalım. (Sol tarafın türevini almak için her terimin türevini alabileceğimizi bilmeniz lazım; bilmiyorsanız da bu yazılık inanın.) Aynen kanıtlamak istediğimiz eşitlik çıkar. □

Şimdi $x = 2/3$ alırsak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1-2/3)^2} = 9$$

bulunur.

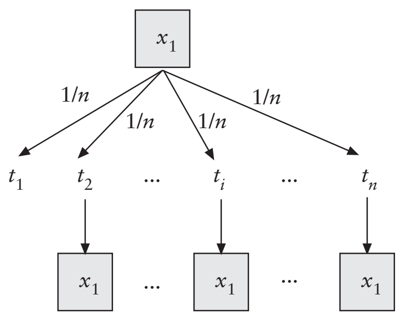
Peynirin bir başka delikte olması bu sonucu değiştirmez elbet. Peynir hangi delikte olursa olsun, fare peyniri ortalama üç denemede bulur.

Acaba buradan, sonucun 2 + 3 + 4 = 9 olduğu anlaşılır m? Bilemiyorum.

Genel Problem. n tane delik olsun ve fare i-inci deliği kolaçan etmek için t_i dakikaya gereksinsin. Ve son olarak da peynirin herhangi bir delikte olma olasılığı ve farenin herhangi bir deliği kolaçan etme olasılığının $1/n$ olduğunu varsayalım, yani tüm olasılıklar aynı olsun, deliklerden birinin diğerine göre bir ayrıcalığı olmasın.

Sorumuz şöyle: *Fare ortalama ne kadar zaman sonra peyniri bulur*?

Peynirin birinci kapıda olduğunu varsayalım. O zaman $1/n$ olasılıkla fare bu kapıyı seçecektir ve t_1 dakika sonra peyniri bulup afiyetle yiyecektir. Eğer $i \neq 1$ ise, fare $1/n$ olasılıkla i-inci kapıyı seçecektir ve t_i zaman sonra peyniri bulamayıp dışarı



çıkacak ve işlemlere yeni baştan başlayacaktır. Eğer x_1 farenin bu durumda peyniri bulmak için geçirdiği ortalama zaman ise,

$$x_1 = \frac{t_1}{n} + \frac{t_2 + x_1}{n} + \ldots + \frac{t_n + x_1}{n}$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

$$x_1 = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

bulunur. Aynı nedenden, eğer peynir i-inci delikte olduğunda farenin peyniri bulmak için geçirdiği ortalama zaman x_i ise,

$$x_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

bulunur. Demek ki, farenin peyniri bulmak için geçireceği ortalama zaman

$$\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n} = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

olacaktır. Demek ki daha önce bulduğumuz

$$9 = 2 + 3 + 4$$

eşitliği rastlantısal değil.

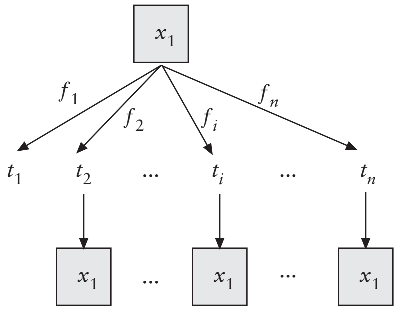
Şimdi bir başka problemin sonucunu bulmaya çalışalım. Fare ortalama kaç denemede peynir olan deliği bulacaktır?

En Genel Problem. Son olarak peynirin i-inci delikte olma olasılığının p_i ve farenin i-inci deliği seçme olasılığının f_i olduğunu varsayalım. Elbette,

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

ve

$$f_1 + \ldots + f_n = 1.$$



Peynir birinci delikte olduğunda, farenin peyniri yemek için harcayacağı ortalama zaman x_1 ise,

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 t_1 + f_2(t_2 + x_1) + \ldots + f_n(t_n + x_1) \\ &= (f_1 t_1 + f_2 t_2 + \ldots + f_n t_n) + (f_2 + \ldots + f_n)x_1 \\ &= (f_1 t_1 + f_2 t_2 + \ldots + f_n t_n) + (1 - f_1)x_1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki,

$$x_1 = \frac{f_1 t_1 + f_2 t_2 + \ldots + f_n t_n}{f_1}.$$

Aynı biçimde,

$$x_i = \frac{f_1 t_1 + f_2 t_2 + \ldots + f_n t_n}{f_i}$$

bulunur. Demek ki farenin peyniri bulacağı ortalama zaman,

$$\sum_i p_i x_i = \sum_i p_i \left(\frac{\sum_j f_j t_j}{f_i} \right) = \sum_{i,j} \frac{p_i}{f_i} f_j t_j$$

$$= \left(\sum_i \frac{p_i}{f_i} \right) \left(\sum_j f_j t_j \right).$$

Birinci soru kadar ilginç bir sonuç değil doğrusu. Eğer $p_i = f_i = 1/n$ ise, daha önce bulduğumuz

$$t_1 + \ldots + t_n$$

sonucunu buluruz. ♠

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Handan Yıldızhan

Toplama A diyelim:

$$A = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$$

Eşitliğin her iki tarafını 2'yle çarpalım:

$$2A = 2/1 + 2/2 + 2/3 + 2/4 + 2/5 + 2/6 + \ldots$$

Yukardaki ifadenin sağ tarafında A'nın yeniden,

$$2/2 + 2/4 + 2/6 + 2/8 + \ldots$$

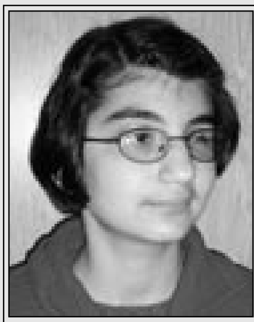
olarak belirdiğini görürüz (paydasında çift sayı olanlar). Demek ki,

$$2A = A + 2/1 + 2/3 + 2/5 + 2/7 + \ldots$$

Ama sonsuz toplamın kuyruğundaki 2/1, 2/3, 2/5, 2/7 gibi paydasında tek sayı olan sayıların her biri de 2/2, 2/4, 2/6, 2/8 sayılarından büyüktür. Demek ki

$$\begin{aligned} 2A &> A + 2/2 + 2/4 + 2/6 + 2/8 + \ldots \\ &= A + 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots \\ &= A + A = 2A. \end{aligned}$$

Demek ki $2A > 2A$. Dolayısıyla A bir gerçel sayı olamaz, sonsuz olmak zorundadır.



Handan Yıldızhan, Çağrıbey Anadolu Lisesi 9A sınıfındadır ve MD'nin iştahlı bir okurudur. Daha önce görmediğimiz bu güzel kanıtı için kendisini kutlarız.