28'inci Balkan Matematik Olimpiyatları

İhsan Yücel*, Matematik Milli Takım Öğrencileri**
ihsanyucel19@gmail.com

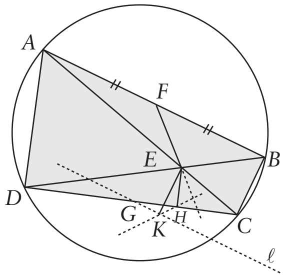
18'inci Ulusal Matematik Olimpiyatı'nın Birinci Aşama Sınavı sonucunda toplamda 51 kişinin katılmaya hak kazandığı İkinci Aşama Sınavı diğer bilim olimpiyatlarıyla beraber 27-28 Kasım 2010'da Ankara'da yapılmıştı. İkinci aşama sınavı sonuçlarına göre Uluslararası Bilim Olimpiyatları'na Hazırlık Kış Kampı'na katılan öğrenciler Mart ayının sonunda Milli Matematik Olimpiyat Takımı'na girmek için yapılan ve her günde Sonlu Matematik, Geometri, Sayılar Teorisi ve Analiz-Cebir konularını içeren 3 soru için 4,5 saat sürenin verildiği 3 günden oluşan Türkiye Takım Seçme Sınavı(TST)'nda ter döktüler.

Soldan sağa: Polatkan Polat, Ufuk Kanat, Mehmet Efe Akengin, Şahin Emrah, Yiğit Yargıç, Mehmet Sönmez, Eray Akgün, Y. Emre Demirci, Mehmet Şahin.

Milli takımımız, Şahin Emrah ve Mehmet Şahin hocalarımızın liderliğinde 4-8 Mayıs 2011 tarihleri arasında Romanya'nın Iasi (Yaş) kentinde 20 ülkeden toplam 115 öğrencinin katılımıyla düzenlenen 28'inci Balkan Matematik Olimpiyatı'nda ülkemizi temsil ettiler. 4,5 saat süreli ve her biri 10 puan üzerinden değerlendirilen 4 sorunun sorulduğu tek oturumdan oluşan ve bu sene Romanya takımının 4 altın, 1 gümüş, 1 bronz madalya ve toplam 170 puan kazanarak birinci; Türkiye takımının 1 altın, 4 gümüş, 1 bronz madalya ve toplam 148 puanla kazanarak ikinci; Bulgaristan takımının 1 altın, 4 gümüş, 1 bronz madalya ve toplam 137 puanla takım olarak üçüncü olduğu yarışmada, öğrencilerimizin aldıkları puanlar şöyledir: Mehmet Sönmez, 31 puan, altın, Özel Yamanlar Fen Lisesi / Ufuk Kanat, 29 puan, gümüş, Özel Samanyolu Fen Lisesi / Yiğit Yargıç, 29 puan, gümüş, İstanbul Lisesi / Mehmet Efe Akengin, 22 puan gümüş, İstanbul Lisesi / Yunus Emre Demirci, 21 puan, gümüş, Özel Aziziye Fen Lisesi / Polatkan Polat, 16 puan, bronz, Özel Serhat Fen Lisesi. Toplamda ise 9 altın, 31 gümüş ve 46 bronz madalya dağıtıldı.

Sınav sorularına ve milli takımımızdaki öğrencilerin sorulara verdiği çözümlere bir göz atalım:

Soru 1. *Yamuk olmayan bir ABCD kirişler dörtgeninin köşegenleri E noktasında kesişmektedir.* $[AB]$ *ve* $[CD]$ *doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla F ve G,* ℓ *doğrusu da, G'den geçen ve AB'ye paralel olan doğrudur. E'den* ℓ*'ye ve CD'ye inilen dikmelerin ayakları sırasıyla H ve K olsun.* $EF \perp HK$ *olduğunu ispatlayın.*

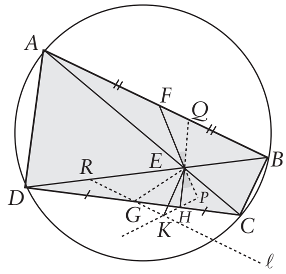


Çözüm (Mehmet Efe Akengin / İstanbul Lisesi): EH doğrusu AB ve HK'yi sırasıyla Q ve P noktalarında, ℓ doğrusu ED'yi R'de kessin. Bu noktaları bir sonraki sayfada gösterdik.

$$m(EHG) = 90° = m(EKG)$$

olduğundan E, K, H ve G noktaları çemberseldir (EG çaplı dairenin üstündedirler). Bu çemberselliği kullanarak,

* Matematik öğretmeni.
** Sağ üst köşedeki fotoğrafta, soldan sağa: Mehmet Sönmez, Ufuk Kanat, Yiğit Yargıç, Mehmet Akengin, Y. Emre Demirci, Polatkan Polat



$$EF \perp HK \Leftrightarrow m(HEP) + m(EHP) = 90°$$
$$\Leftrightarrow m(FEQ) + (180° - m(KHE)) = 90°$$
$$\Leftrightarrow (m(AEQ) - m(AEF)) + m(EGK) = 90°$$
$$\Leftrightarrow (m(HEC) - m(AEF))$$
$$(m(ERG) + m(DEG)) = 90°$$

bulunur. Diğer taraftan, $\ell \parallel AB$'den ve $ABCD$'nin kirişsel dörtgeni olmasından,

$$m(ERG) = m(ABE) = m(ECH)$$

eşitliklerini biliyoruz. Bunu yukarıya yansıtırsak,

$$EF \perp HK \Leftrightarrow (m(HEC) - m(AEF))$$
$$(m(ECH) + m(DEG)) = 90°$$
$$\Leftrightarrow (m(HEC) + m(ECH)) - m(AEF)$$
$$+ m(DEG) = 90°$$
$$\Leftrightarrow m(DEG) = m(AEF)$$

buluruz.

Şimdi bu son eşitliği kanıtlayalım. $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğundan, $\Delta ABE \sim \Delta DEC$ olur. EG ve EF doğru parçaları, bu iki benzer üçgenin kenarortayları olduğundan, bu doğru parçalarının iki üçgen içinde oluşturduğu üçgenler de benzerdir, demek ki $\Delta DEG \sim \Delta AEF$. Dolayısıyla $m(DEG) = m(AEF)$ olur ve böylece ispat biter.

Soru 2. *x, y, z reel sayıları, $x + y + z = 0$ koşulunu sağlıyorsa,*

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayın ve eşitlik durumunu bulun.

Çözüm (Mehmet Efe Akengin / İstanbul Lisesi): Öncelikle

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} = \frac{(2x+1)^2}{2(2x^2+1)} - \frac{1}{2}$$

eşitliğini kullanarak, eşitsizliği

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Diğer taraftan,

$$2x^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}(-x)^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}(y+z)^2$$
$$\leq \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}(y^2+z^2) = \frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2) \quad (\ast)$$

olduğundan, ve benzer eşitsizlik y ve z için de geçerli olduğundan,

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}$$
$$\geq \frac{(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+1} = 3$$

bulunur. Eşitliğin sağlanması için

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} = \frac{(2x+1)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+1}$$
$$\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} = \frac{(2y+1)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+1}$$
$$\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} = \frac{(2z+1)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+1}$$

olmalı. Birinci eşitlik, ancak

$$2x + 1 = 0$$

ise ya da

$$(y + z)^2 = 2(y^2 + z^2), \text{ yani } y = z$$

ise gerçekleşebilir. İkinci ve üçüncü eşitliklerin gerçekleşmesi için, bu koşulun (x, y, z) üçlüsünün döngüsel permütasyonları için de doğru olması gerekir. Bundan, kolaylıkla eşitliğin şu durumlarda olacağı çıkar:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$
$$(x, y, z) = (1, -1/2, -1/2)$$
$$(x, y, z) = (-1/2, 1, -1/2)$$
$$(x, y, z) = (-1/2, -1/2, 1).$$

Soru 3. *Elemanları pozitif tamsayılar olan sonlu bir S kümesinin şu özelliği vardır: "Eğer $x \in S$ ise, x'in tüm pozitif tambölenleri de S kümesinin elemanıdır". T kümesi S kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $x < y$ koşuluna uyan her x, $y \in T$ için $y/x \in \mathbb{N}$ ve bir asal sayının bir tamkuvvetine eşitse, T kümesine "iyi küme" diyelim. Eğer $x < y$ koşuluna uyan hiçbir x, $y \in T$ için y/x sayısı bir asal sayının tamkuvvetine eşit değilse, T kümesine "kötü küme" diyelim. S kümesinin bir elemanlı her altkümesinin hem iyi hem de kötü küme olduğunu kabul edelim. k sayısı, S kümesinin "iyi" altkümelerinin maksimum eleman sayısı olsun. Bileşimleri S kümesine eşit ve ikişerli olarak ayrık olan k tane kötü küme olduğunu ve bu koşulları sağlayan daha az sayıda kötü küme olamayacağını gösteriniz.*

Çözüm (Mehmet Sönmez/Özel Yamanlar Fen Lisesi): Eleman sayısı $k \geq 3$ olan bir T iyi kümesi alalım. T'nin iki farklı elemanı aynı kötü kümede olamayacağından, problemdeki gibi kötü küme sayısının en az k olması gerektiği bariz. T'nin en küçük elemanı a, en büyük elemanı da b olsun. İyi küme olma koşulundan dolayı,

$$b/a = p^{\alpha}$$

eşitliğini sağlayan p asalı ve α pozitif doğal sayısı vardır. T'nin bir başka c sayısına bakalım.

$$c/a = r^{\beta}$$

eşitliği olacak biçimde r asal sayısı ve β pozitif doğal sayısı vardır. Eğer $r \neq p$ ise b/c sayısı tamsayı olamaz, demek ki $r = p$ ve T kümesi

$$T = \{a, ap^{\alpha_1}, ap^{\alpha_2}, ..., ap^{\alpha_{k-1}} = b\}$$

olmalı. T'nin elemanlarının asal bir böleninin en fazla k–1'inci kuvveti bu elemanı bölebilir, çünkü aksi halde k'dan daha fazla elemanı olan bir iyi küme bulunur. Demek ki

$$T = \{a, ap, ap^2, ..., ap^{k-1} = b\}$$

olmalı. $c \in S$ için

$$c = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$$

gösterimi c'nin farklı asallara ayrışımıysa,

$$f(c) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$$

olsun. $i = 0, 1, ..., k-1$ için

$$S_i = \{c \in S : f(c) \equiv i \ (\text{mod } k)\}$$

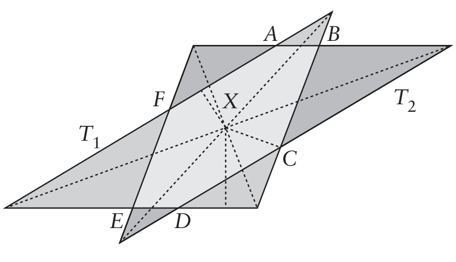
olsun. Bu kümeler kötü kümedir çünkü $m, n \in S_i$ için $m/n = p^r$ ise

$$r = f(m) - f(n) \equiv i - i = 0 \ (\text{mod } k)$$

olur. Ama $r \leq k - 1$ olduğundan $r = 0$, yani $m = n$ bulunur.

Not: Aynı soruyu İstanbul Lisesi'nden Yiğit Yargıç da şık ancak daha uzun bir yolla çözmüştür.

Soru 4: *Alanı* 1 *olan ABCDEF konveks altıgeninin karşılıklı kenarları paraleldir. AB, CD ve EF doğrularının ikişerli kesişme noktaları bir üçgenin köşegenleridir. Benzer olarak BC, DE ve FA doğrularının ikişerli kesişme noktaları başka bir üçgenin köşeleridir. Bu üçgenlerden en az birinin alanının en az 3/2 olduğunu gösteriniz.*



Birinci Çözüm (Yiğit Yargıç/İstanbul Lisesi): Soruda bahsedilen iki üçgene T_1 ve T_2 diyelim. Alanları sırasıyla S_1 ve S_2 olsun. Eğer S_1 ve S_2, 3/2'den küçük ise, $ABCDEF$ altıgeninin alanının 1'den küçük olduğunu göstereceğiz.

T_1 ve T_2 üçgenlerinin karşılıklı kenarları paralel olduğundan, bu iki üçgen homotetiktir. Homoteti merkezi X olsun. Genelliği bozmadan $S_1 \geq S_2$ varsayımını yapabiliriz.

T_1'in X'e göre simetriği olan üçgene T_2* diyelim. T_2* üçgeni T_2'yi kapsadığından, T_2 yerine T_2* üçgenini alırsak, bu üçgenin T_1 ile kesişimi olan altıgen büyüyecektir. Bu nedenle genelliği bozmadan $S_1 = S_2 = S$ varsayabiliriz. Öyleyse, tüm şekil X'e göre simetrik olur. Böylece $ABCDEF$ altıgeni de X'e göre simetrik olur.

X noktasının T_1 üçgeninin kenarlarına olan uzaklıklarının, T_1 üçgeninin karşılık gelen yüksekliğine oranları k_1, k_2, k_3 olsun. Şimdi,

$$\begin{aligned}\text{Alan}(ABCDEF) &= \text{Alan}(T_1) - \text{Alan}(T_1 - ABCDEF)\\ &= S - S \times \sum_i (1-2k_i)^2\\ &= S \times \left(1 - \sum_i (1-2k_i)^2\right)\\ &< \frac{3}{2} \times \left(1 - \sum_i (1-2k_i)^2\right)\\ &= \frac{3}{2} \times \left(-2 + 4\sum_i k_i - 4\sum_i k_i^2\right)\end{aligned}$$

bulunur. X noktasının T_1 üçgeninin köşelerine birleştirirsek elde edeceğimiz üç tane üçgenin alanlarının T_1'in alanına oranları k_1, k_2 ve k_3'tür. Buradan $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ buluruz. Dolayısıyla Aritmetik - Karesel Ortalama eşitsizliğinden

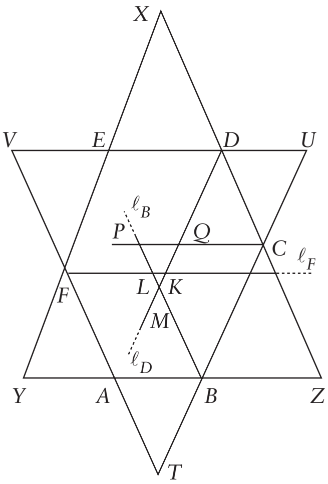
$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geq \frac{1}{3} \cdot (k_1 + k_2 + k_3)^2 = \frac{1}{3}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\text{Alan}(ABCDEF) &< \frac{3}{2} \cdot \left(-1 + 4\sum_i k_i - 4\sum_i k_i^2\right)\\ &\leq \frac{3}{2} \cdot \left(-2 + 4 - \frac{4}{3}\right) = 1\end{aligned}$$

bulunur ve ispatımız tamamlanır.

İkinci Çözüm (Ufuk Kanat/Özel Samanyolu Fen Lisesi): AB, CD, EF doğruları aşağıdaki şekildeki gibi XYZ üçgenini; BC, DE, FA doğruları TUV üçgenini oluştursun. F'den AB'ye, B'den CD'ye, D'den EF'ye çizilen paraleller sırasıyla ℓ_F, ℓ_B, ℓ_D olsun. ℓ_B, ℓ_D, ℓ_F doğruları KLM üçgenini oluştursun. Genelliği bozmadan ℓ_F'nin $[CB]$ den geçtiğini kabul edelim. C'den ℓ_F'ye çizilen paralel



ℓ_B'yi P'de kessin. $CP \cap \ell_D = \{Q\}$ olsun.

$$A(UDC) + A(CBZ) = A(QDC) + A(PBC) = A(CDMB) + A(PMQ)$$

ve $\ell_F \cap CB \in [CB]$'den dolayı

$$A(PMQ) \geq A(KLM)$$

olup

$$A(UDC) + A(CBZ) \geq A(CDMB) + A(KLM)$$

olur. Aynı şekilde

$$A(ABT) + A(AFY) \geq A(AFLB),$$
$$A(VEF) + A(XED) \geq A(DEFK)$$

olur. O zaman,

$$A(ABT) + A(BCZ) + A(CDU) + A(DEX) + A(EFV) + A(FAY) \geq A(ABLF) + A(CBMD) + A(DEFK) + A(KLM) = A(ABCDEF) = 1$$

olup hem

$$A(XED) + A(YAF) + A(ZCB) < 1/2$$

hem de

$$A(TAB) + A(UDC) + A(VFE) < 1/2$$

sağlanamayacağından ya $A(XYZ)$ ya da $A(VUT)$ en az birinin alanı $1 + 1/2 = 3/2$ olacaktır. ♣

Olimpiyatçıların kutsal Sitesi:

www.mathlinks.ro

İhsan Yücel / *ihsanyucel19@gmail.com*

2004 yılında Romen matematikçi Valentin Vornicu tarafında kurulan ve şu an AOPS'un (Art of Problem Solving) bünyesinde bulunan eski adresi ile www.mathlinks.ro, yeni adresi ile http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1, matematik olimpiyatlarına dair her şeyi İngilizce olarak bulabileceğiniz bir site. Site çubuğuna www.mathlinks.ro yazdığınızda karşınıza ilk çıkan sayfa, reklam ve her türlü şatafattan uzak, sade ve "bilimsel" bir sayfa oluyor (bkz yandaki resim). Üst taraftaki çubuktan Community (camia) düğmesine tıklayarak matematik deryasına dalmak, ya da sayfanın solunda yer alan LatestUpdates (en son eklenenler) kısmından istediğiniz bir ülkenin Ulusal Matematik Olimpiyatı sorularına ulaşmak, Problem of Day düğmesinden günün sorusunu çözüp ilk çözüm yollayan olmak ya da en son gönderilenleri konu başlıkları ile ana sayfanın sağ kısmında Recent Post başlığı altında görmek mümkün. Bizi en çok cezbeden şeyse, Contests (yarışmalar) düğmesinden günümüze kadar yeryüzünde yapılmış pek çok olimpiyat sorusuna çözümleri ile birlikte ulaşılabilmesi (Türkiye'nin sorularını dahi bulabilirsiniz, tabii ki İngilizce.). Sitede birkaç saat dolanınca, Mathlinks'in neden olimpiyatçıların "kutsal" sitesi olduğunu daha iyi anlayacaksınız. Bu sitede her matematikçinin derdine derman var. Sadece olimpiyat değil, matematik ile alakalı herhangi bir konuda kafanıza takılan bir şeyi uygun alt forum'da sorduğunuzda, çok kısa sürede yardımcı olan birileri bulabiliyorsunuz. Herhalde fazla söze gerek yok, Mathlinks'i kaçırmayın deriz.