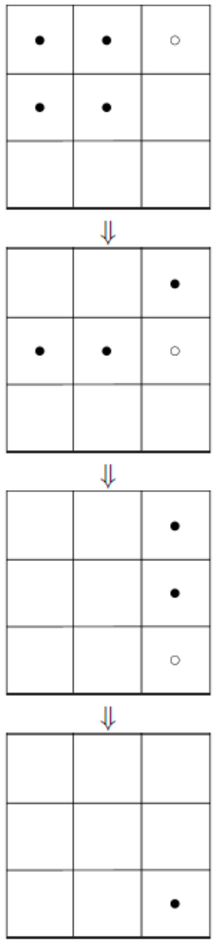
Satranç Tahtasında Solo Oyunu

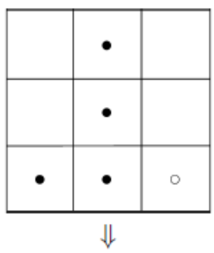
İhsan Yücel / ihsanyucel19@gmail.com

Birçoğumuz belki küçükken belki de ilerleyen yaşımızda Solo Oyununu* ya kendimiz oynamaya çalışmışızdır ya da işin içinden çıkamayan birisi bizden yardım istemiştir. Genellikle oyunu birkaç adımda oynadıktan sonra kaçımız tek taş bıraktı bilemiyorum fakat bildiğim şu ki inatçı okur bu satırları okuduktan sonra bu oyunun ya stratejisini bularak geceyi rahat bir uykuyla geçirecek ya da bu soru sorulduğunda kaçmaya yer arayacak! Oyunu hiç oynamayan okur için nasıl oynandığını tekrar anlatalım: Oyunu satranç tahtasında oynadığımızı düşünelim. Oyunda taşlar yukarı, aşağı ve sağa, sola doğru hareket edebilir ancak çapraz hareket edemezler. Oyun taşı, başka bir taşın üzerinden atlatılarak sonraki boş deliğe girer ve üzerinden atlanan taş yerinden çıkartılarak alınır. Oyun bu şekilde üzerinden atlanarak alınabilecek taş kalmayıncaya kadar devam eder. Kalan taş adedi oyunun sonucunu gösterir. Oyunun amacı, oyun tahtasında mümkün olan en az sayıda taşı bırakabilmektir. Oyunda en büyük başarı oyun sonunda tahtada tek bir taş bırakabilmektir. Solo test kimilerine göre bir zeka oyunu olarak gösterilse de oyunun çözümü için bazı matematiksel formüller ve stratejiler geliştirilmiştir. Bu stratejileri uygulayarak oyunda sürekli tek taşı bırakmak mümkündür. Bu açıdan oyunu zeka testinden ziyade bir strateji oyunu olarak değerlendirmek daha doğru olacaktır. Şimdi sorumuzu genelleyerek bir strateji geliştirmeye çalışalım:

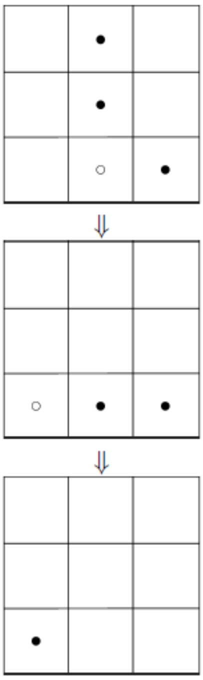
Problem 1. Sonsuz satranç tahtasında tek kişilik bir oyun şu şekilde oynanıyor: Başlangıçta, sonsuz satranç tahtası üzerinde n×n'lik bir kare seçilip tüm birim karelerine birer taş konuluyor. Şu hamleyi yapabiliyoruz: Bir taşı dolu olan komşu karelerden birinin üzerinden atlatıp, bir sonraki kareye koyabiliyoruz. Üzerinden atladığımız taşı alıyoruz. Hangi n'ler için tahtada tek taş bırakmak mümkündür? i) Burada n = 1 için tek taş bırakmanın mümkün olduğu açıktır. ii) n = 2 için durum incelemesini aşağıdaki gibi yapmaya çalışırsak, (○ ile hamle yapılacak kareyi gösterelim.)



Şimdi de sık sık kullanacağımız aşağıdaki şekli tahlil etmeye çalışalım.



* Bu oyunu ne zaman oynadığımı hatırlayamasam da en son `http://oyun.turk.net/zeka/solo-test.asp` adresinde oynadığımı belirteyim.



iii) $n \geq 3$ durumunu tahlil etmeye çalışalım. Sabırsız okur durumunu daha bu satıra geçmeden deneyerek bulmaya çabalasa da ne yazık ki bundan sonra yazacağımız iddiayı okumasını tavsiye edeceğim.

İddia 1. $3|n$ durumu için tek taş bırakmak mümkün değildir.

İspat. Tabloyu 1, 2, 3 renkleriyle öyle boyayalım ki bir hamle yapıldığında iki renkteki taşların sayısı birer azalırken diğer renk üzerindeki taşların sayısı bir artsın. Uygun bir boyama aşağıdaki gibi yapılabilir. (Sonsuz satranç tahtasının bütün karelerini boyuyoruz)

2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2

i'inci hamle sonunda; 1 ile boyalı karelerde bulunan taşların sayısına $f_n(a_i)$, 2 ile boyalı karelerde bulunan taşların sayısına $f_n(b_i)$ ve 3 ile boyalı karelerde bulunan taşların sayısına $f_n(c_i)$ diyelim. Şimdi $3|n$ için $f_n(a_0) = f_n(b_0) = f_n(c_0)$ olduğunu gösterelim. 3×3'lük kare için,

3	1	2
2	3	1
1	2	3

$f_3(a_0) = f_3(b_0) = f_3(c_0)$ olacağı görülmektedir.

$n > 3$ için $n \times n$'lik kareyi 3×3'lük, $n^2/9$ parçaya ayıralım. 3×3'lük karelerin hepsinde $f_3(a_0) = f_3(b_0) = f_3(c_0)$'dir. O zaman toplamda $f_n(a_0) = f_n(b_0) = f_n(c_0)$ olacaktır.

$$f_3(a_0) = f_3(b_0) = f_3(c_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f_n(a_0) \equiv f_n(b_0) \equiv f_3(c_0) (\bmod 2)$$

olacaktır. Burada i'inci hamleden sonra $(i+1)$'inci hamleye geçerken boyamanın özelliğinden dolayı $f_n(a_0)$, $f_n(b_0)$, $f_n(c_0)$ değerleri ± 1 değişecektir. Yani mod 2'de değerler $+1$ olarak değişir. Bu durumda,

$$f_n(a_i) \equiv f_n(b_i) \equiv f_n(c_i) (\bmod 2)$$

$$\Downarrow$$

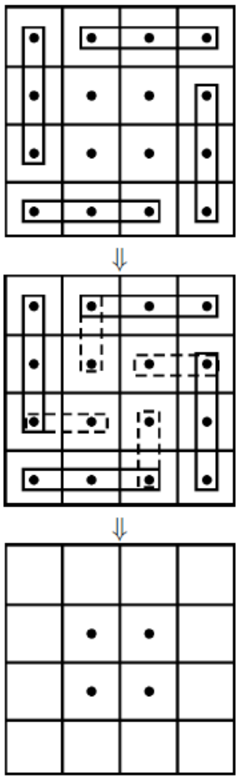
$$f_n(a_{i+1}) \equiv f_n(b_{i+1}) \equiv f_3(c_{i+1}) (\bmod 2) \qquad \star$$

olacaktır. $3|n$ için m hamle sonunda tek taş bırakılabiliyorsa, son durumda $f_n(a_m)$, $f_n(b_m)$, $f_n(c_m)$ değerlerinden ikisi 0 biri 1 olmak zorunda fakat bu durum $\star$ ile çelişir. Yani $3|n$ için tahtada tek taş bırakmak mümkün değildir.

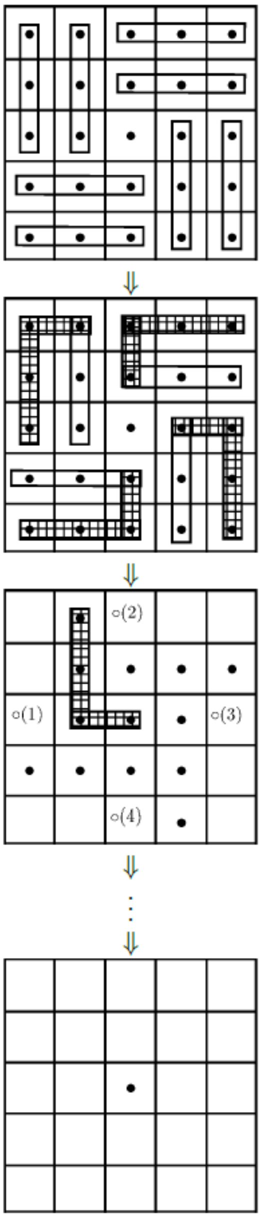
İddia 2. $3 \nmid n$ için tahtada tek taş bırakmak mümkündür.

İspat. Bu iddiayı tümevarım kullanarak ispatlayalım.

Yazımızın başında $n \in \{1, 2\}$ durumları için tek taş bırakmanın mümkün olduğunu göstermiştik. Şimdi $n = 4$ durumunu göstermeye çalışalım:

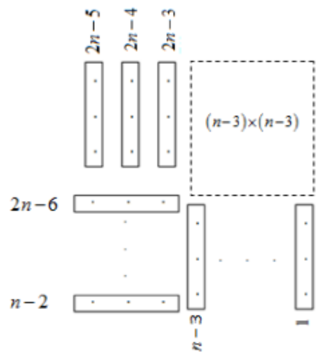


Son durumda yine tek taş kalacaktır. Şimdi de $n = 5$ durumunu inceleyelim. Bir önceki adımda uyguladığımız işlem mantığını burada da uygulamaya çalışalım. 5×5'lik kare içerisinde en fazla 3×1'lik 8 parça bulunmaktadır. 5×5'lik karede 1 (b adet) ve 3 (a adet) birimlik uzunluklardan oluşacağından $3a + b = 5$ denkleminden $(a, b) = (1, 2)$ bulunur. Yani bir kenar, 3 birimlik 1 parça ve 1 birimlik 2 parçadan oluşacaktır. Bu söylediklerimizi şeklimize dökecek olursak:



Yukarıdaki son adımda ○(1), ○(2), ○(3), ○(4) ile gösterilen boşlukta sırayla hamleleri tamamladığımızda en sonunda sadece bir taşımız kalacaktır.

$n \geq 6$ durumunu incelersek:



Yukarıdaki şekildeki sayılar üçlü grupların tahtadan kaldırılma sırasını göstermektedir. $n \geq 6$ise yukarıda görüldüğü gibi $n \times n$ hali $(n-3) \times (n-3)$ haline dönüşebilir ve bu dönüşüm tekrarlanarak 2×2 veya 1×1 durumuna indirgenirse $n \equiv 1(3)$ ya da $n \equiv 2(3)$ biçiminde oyun istenilen biçiminde sonlanabilir.

Sorular.

bf 1. 1.soruyu $n \times m$'lik dikdörtgen için düşündüğümüzde sonsuz satranç tahtası üzerinde tek taş bırakmak mümkün müdür? $(n > m)$

2. 1.soruyu dik kenarları satranç tahtasının kenarlarına paralel, dik kenarlarının uzunluğu n olan ikizkenar dik üçgen için düşündüğümüzde sonsuz satranç tahtası üzerinde tek taş bırakmak mümkün müdür?

3. 1.soruyu hipotenüsü satranç tahtasının kenarlarına paralel, dik kenarlarının uzunluğu n olan ikizkenar dik üçgen için düşündüğümüzde sonsuz satranç tahtası üzerinde tek taş bırakmak mümkün müdür?