52’inci Uluslararası Matematik Olimpiyatı

İhsan Yücel[1]/ihsanyucel19@gmail.com, Matematik Milli Takım Öğrencileri[2]

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı 16-24 Temmuz tarihleri arasında Hollanda’nın Amsterdam kentinde yapıldı. 101 ülkeden 564 yarışmacının katıldığı olimpiyatlarda matematik milli takımımız büyük bir başarıya imza attı. Dört buçuk saatlik iki oturumdan oluşan sınavda, her oturumda öğrencilere 7 puan değerinde 3’er soru yöneltildi. Toplam 42 puan üzerinden Mehmet Sönmez 34 puan, Ufuk Kanat 33 puan ve Mehmet Efe Akengin 28 puanla altın; Yunus Emre Demirci ve Polatkan Polat 23'er puanla gümüş; Yiğit Yargıç 18 puanla bronz madalya kazandı. Bireysel sıralamada Mehmet Sönmez 10. ve Ufuk Kanat 12. oldu. İlk on ülke ve puanları ise şu şekilde sıralandı: Çin-189, USA-184, Singapur-179, Rusya-161, Tayland-160, TÜRKİYE-159, Kuzey Kore-157, Romanya-154, Tayvan-154, İran-151.

Soldan sağa: Yiğit Yargıç, Ufuk Kanat, Yunus Emre Demirci, Polatkan Polat, Mehmet Efe Akengin, Azer Kerimov.

Takım liderliğini Bilkent Üniversitesi öğretim üyelerinden Okan Tekman ve lider yardımcılığını da yine aynı üniversiteden Azer Kerimov yapmıştır. Son 5 senelik dilime bakıldığında, milli takımımız sürekli bir artış izleyerek 17. sıradan önce 8liğe yükselmiş, üç sene ard arda 8. olduktan sonra da kendi rekorunu kırarak dünya altıncısı olmuştur. Ayrıca sınavın en zor sorusu olan 6. sorudan da en yüksek puanı Milli Takımımız almıştır.

Çok uzatmadan, 52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı’nda sorulan sorulara ve çözümlerine geçelim…

[1] Matematik öğretmeni
[2] (sol üst baştan sağa doğru)Mehmet Sönmez, Ufuk Kanat, (sol alt baştan sağa doğru) Mehmet Akengin, Yiğit Yargıç.

BİRİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 1. *Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ *kümesi için,* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ *toplamını* s_A *ile gösterelim.* $1 \le i < j \le 4$ *olmak üzere,* $a_i + a_j$*' nin* s_A*'yı böldüğü* (i, j) *ikililerinin sayısını da* n_A *ile gösterelim. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan ve* n_A*'nın alabileceği en büyük değeri almasını sağlayan tüm A kümelerini bulunuz.*

Çözüm (Yiğit Yargıç / Ludvig Maximilian Universität, Munich, Teorik Fizik): Genelliği bozmadan $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ varsayıp, $n_A \le 4$ eşitsizliğini gösterelim:

$$\frac{s_A}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} < \frac{a_3 + a_4 + a_3 + a_4}{2} = a_3 + a_4 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_A$$

olduğundan $(a_3 + a_4) \nmid s_A$,

$$\frac{s_A}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} < \frac{a_2 + a_2 + a_4 + a_4}{2} = a_2 + a_4 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_A$$

olduğundan $(a_2 + a_4) \nmid s_A$ olacaktır. Demek ki $n_A \le 4$ tür. Ayrıca $n_A = 4$ olabilmesi için, hem $(a_1 + a_4) \nmid s_A$ hem de $(a_2 + a_3) \mid s_A$ sağlanması gerekiyor, ancak

$$(a_1 + a_4) + (a_2 + a_3) = s_A$$

olduğu için

$$(a_1 + a_4) = (a_2 + a_3) = \frac{s_A}{2}$$

olması gerekir. Burada $n_A = 4$ eşitliğinin mümkün olduğunu iddia ederek tüm çözümleri bulmaya çalışacağız. $x = a_1$, $y = a_4$ ve $t = a_2 - a_1 = a_4 - a_3$ dersek, elimizdeki dört sayı sırasıyla $x, x + t, y - t, y$ şeklini alır.

$(a_1 + a_4) \mid s_A$' dan $(x + y - t) \setminus 2(x + y)$, yani $\dfrac{2(x+y)}{x+y-t} \in \mathbb{Z}^+$ elde ederiz.

Ayrıca $a_2 < a_3$ olduğundan $x + t < y - t$, yani $2t < y - x < x + y$ buluruz.

$$4(x + y - t) > 2(x + y) > 2(x + y - t)$$

ve buradan $4 > \dfrac{2(x+y)}{x+y-t} > 2$ olması gerekir. Öyleyse $\dfrac{2(x+y)}{x+y-t} = 3$, yani $t = \dfrac{x+y}{3}$ olmalıdır.

$t = \dfrac{x+y}{3}$ yerine yazarsak elimizdeki dört sayı sırasıyla $x, \dfrac{4x+y}{3}, \dfrac{2y-x}{3}, y$ olur. $a_2 < a_3$ olduğundan $\dfrac{4x+y}{3} < \dfrac{2y-x}{3}$, yani $y > 5x$ olmalıdır.

$(a_1 + a_2) \mid s_A$ dan $\dfrac{7x+y}{3} \mid 2(x + y)$, buradan da adım adım: $(7x + y) \mid (6x + 6y)$,

$$(7x + y) \mid (6(7x + y) - (6x + 6y)) \text{ ise } (7x + y) \mid 36x$$

ve $\dfrac{36x}{7x+y} \in \mathbb{Z}^+$ buluruz. Ancak, $\dfrac{36x}{7x+y} < \dfrac{36x}{7x+5x} = 3$ olduğundan $\dfrac{36x}{7x+y} \in \{1, 2\}$ olmalıdır.

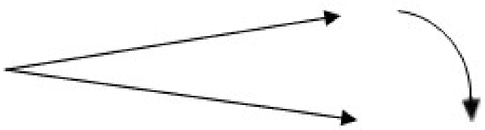
$\dfrac{36x}{7x+y}=1$ olursa, $y = 29x$ ve böylece çözüm $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (x, 11x, 19x, 29x)$ olur.

$\dfrac{36x}{7x+y}=2$ olursa, $y = 11x$ ve böylece çözüm $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (x, 5x, 7x, 11x)$ olur.

Bu iki çözüm her $x \in \mathbb{N}$ için sorudaki şartı sağlar bütün çözümler de bunlardır.

Soru 2. *S düzlemde en az iki noktadan oluşan sonlu bir küme olsun. S'nin herhangi üç noktasının doğrudaş olmadığını varsayalım. Bir yel değirmeni, S'ye ait tek bir P noktasından geçen bir l doğrusu ile başlayan bir süreçtir. Bu doğru, dönme merkezi P olmak üzere, S'nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönüyor. Bu ikinci noktaya Q dersek, bundan sonra doğru, yeni dönme merkezi Q olmak üzere, tekrar S'nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönmeyi sürdürüyor. Bu süreç sonsuz kadar devam ediyor. Oluşan yel değirmenin S'nin her noktasını sonsuz kez dönme merkezi olarak kullanmasını sağlayacak biçimde, S'ye ait bir P noktası ve P'den geçen bir l doğrusu seçebileceğimizi gösteriniz.*

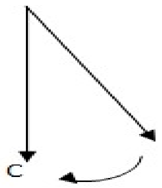
Çözüm (Mehmet Sönmez / İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi): Çözüme bir gözlemimizle başlayalım. Bu süreçte bizden istenen her noktanın sonsuz kere dönme merkezi olmasıdır. Bu nedenle ilk olarak periyodik olma durumunu ispatlamaya çalışalım. (M_A, U_B) ikilisiyle dönme merkezi A olan ve uç noktası B olan doğruyu gösterelim. Bu gösterim, süreçteki herhangi bir zamanda başta seçilen ve dönme merkezi değiştirilerek süreç oluşturan doğrunun nerede olduğunu ve dönme merkezi ne olduğunu bize gösteriyor.



Şekil-1

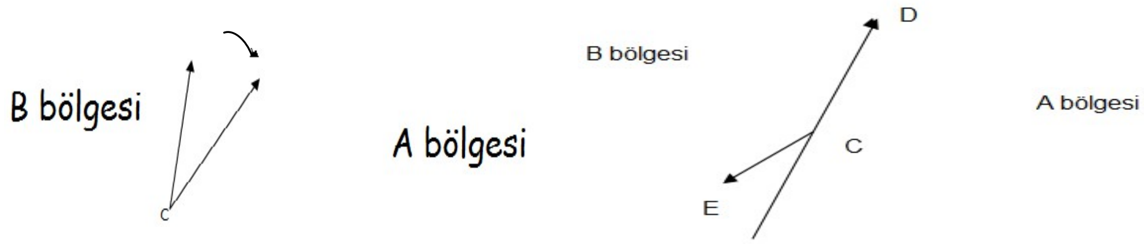
Şekil-1'de kesişim yeri merkez olmakta ve doğru yeni bir noktayla temas ettiğinde ise yeni değilen nokta merkez, önceden merkez olan ise uç nokta olmaktadır. Doğrunun hareketi herhangi bir şekilde sınırlanamadığı için doğru sonsuz defa bu süreç içinde (*merkez*, *uç*) ikilisini değiştirecek, o halde en az bir ikili iki defa geçecektir. O ikiliyi göz önünde bulunduralım. Süreç oluşturan doğrumuz iki kez aynı (*merkez*, *uç*) ikilisine uğramış olduğundan bu ikiliye uğradıktan sonraki hareket fonksiyonu aynı olduğu için doğrunun bu iki noktaya uğradıktan sonra uğradığı yerler ilk kez bu ikiliye uğradıktan sonra ile ikinci kez uğradıktan sonra aynı olacaktır. Yani ileriye gidiş tek türlü olmalıdır. Geriye dönüşün de tek türlü olduğu aşikardır. Çünkü iki durumda da doğrunun önceki geçtiği nokta, uç noktanın saat yönünün tersine döndürülmesiyle bulunacaktır. Bu da iki durumda da aynıdır. O halde bu doğru süreç içinde bir defa bir ikili üzerinde bulunduysa aslında bu ikili üzerinde sonsuz defa bulunmuştur yani sürecimiz tam periyodiktir. Bir diğer gözlemimiz olarak herhangi bir noktadan öyle bir doğru çizilir ki şekli tam olarak iki eş parçaya böler. Bu da aşikardır, çünkü o noktadan geçen herhangi bir doğruyu saat yönüne veya tersine doğru döndürdüğümüzde iki taraf arasında olan nokta sayısı farkı sürekli olarak birer azalacak ve bir yerde eşit olacaktır.

Bir diğer gözlemimiz olarak *n*'nin çift ve tek durumlarını inceleyelim. İlk önce şeklimizde olan bir noktadan geçen ve şekli iki tarafında olan nokta sayısı eşit olacak şekilde ayıran doğruyu alalım.



Şekil-2

Bu doğrunun sağ bölgesi *A* ve sol bölgesi *B* olsun. Doğruyu saat yönüne çevirdiğimizde ve doğrunun şekil-2'de olan bir diğer *C* noktasına değdiğinde *A*'daki nokta sayısı *B*'den bir fazla olur. Bu doğru *C*'yi merkez alarak saat yönüne döndürdüğümüzde ise eğer bir sonraki merkezimiz *A* bölgesinden olursa bu sefer *B*'de ki nokta sayısı *A*'dakinden bir fazla olacaktır. Eğer yine *B* bölgesinden olursa *A*'daki nokta sayısı bir fazla olmaya devam edecektir.

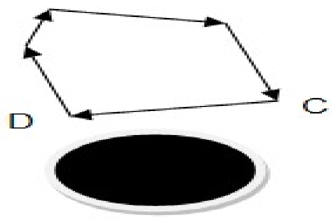


Şekil-3

Şekil-3'de görüldüğü gibi eğer *A* bölgesinde ise yeni merkez *A* bölgesindeki nokta sayısı 1 azalır *B* bölgesindeki nokta sayısı ise 1 artmıştır ve *B*'de ki nokta sayısı *A*'dakinden 1 fazla olur. Eğer yeni merkez *B* bölgesinde ise *B* bölgesinde olan nokta sayısı ve *A* bölgesinde olan nokta sayısı değişmedi. O halde iki bölge arasındaki nokta sayısı farkı değişmedi. Bu demektir ki eğer bir doğru tüm noktaları aralarındaki nokta sayısı farkı bir olan iki bölgeye ayırıyorsa ve doğrunun saat yönü boyunca dönüşündeki rastladığı ilk nokta sayısı az olan bölge ise fark değişmiyor, nokta sayısı fazla olan tarafta ise bu sefer nokta sayısı az olan tarafın nokta sayısı diğer bölgedekinden bir fazla oluyor. O halde şu sonuca varabiliriz ki bu süreçte doğrumuzun tam dönme merkezini değiştirdiği anda ayırdığı iki bölge arasındaki nokta sayısı farkı sadece 1 olacaktır. O halde bu güzel bilgiyi kullanarak soruyu çözelim.

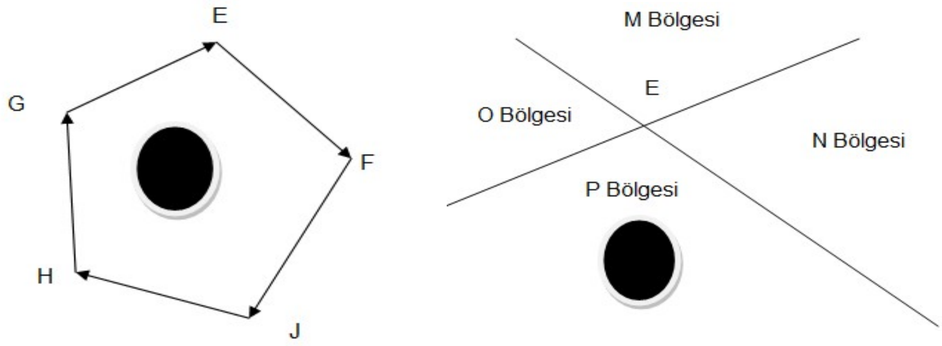
İddiamız biz en başta doğrumuzu şekli aralarında ki nokta sayısı farkı 1 olan ve şeklin iki noktasından geçen doğrumuz olsun. Dönme merkezi bu iki noktadan herhangi biri olabilir. Varsayalım ki bu doğru şartı sağlamasın o halde öyle bir bölge vardır ki bizim doğrumuz o bölgeden hiç geçmemiştir ve o bölgede en az 1 nokta vardır. Şimdi doğrunun sürecini alalım, bu süreç içinde doğru *A* noktasından başlayacak ve bu bölgeden hiç geçmeyecektir. O halde durumlar bu bölgenin çevresinden dolanacaktır veya bu bölgenin sürekli bir tarafında kalacaktır.

Aşağıda şekil-4'deki gibi, siyah bölge içinde en az bir nokta bulunan ve doğrunun süreç içinde bu bölgenin aşağısına (şekildeki gibi) geçemediği bir bölgedir.



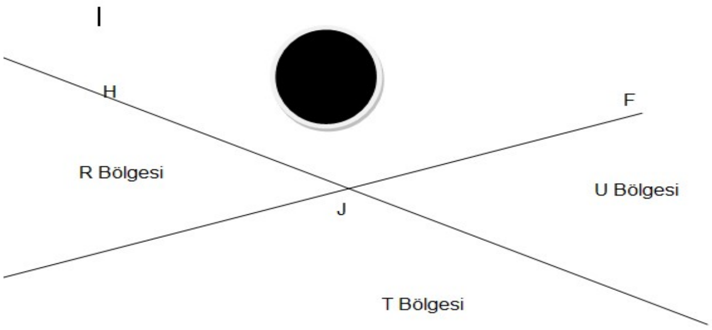
Şekil-4

Ancak böyle bir durum olamaz. Çünkü bu bölge içinde en az bir nokta var ise doğrumuz *C*'yi merkez kabul ettikten sonra saat yönünde döndürülürken siyah bölgedeki bir noktaya *D* noktasından daha önce temas eder ve *C*'den sonraki dönme merkezi *D* olamaz. O halde tek olasılık bu süreç içinde doğrumuzun aşağıdaki gibi siyah bölgenin çevresinden dolanmasıdır.



Şekil-4

Şimdi bu durumu inceleyelim. *GE* doğrusu saat yönüne dönüp ilk rastladığı nokta *F* noktası olduğundan *N* bölgesinde ve *O* bölgesinde nokta yoktur ve *P* bölgesinde noktalar vardır ve bu doğrular şekli nokta sayısı farkı 1 olan iki bölgeye ayıracağından *P* bölgesinde olduğu kadar *M* bölgesinde de nokta var.



Şekil-5

Aynı şekilde *T* bölgesinde de siyah bölgedeki kadar ve *M* bölgesindeki kadar nokta var o halde bu *GE* doğrusunun şekli arasında 1 nokta fark olan iki bölgeye ayırmasıyla çelişir çünkü bu halde *M* bölgesindeki nokta sayısı *P* bölgesindekinden bayağı azdır. O halde böyle bir bölge yoktur. Öyleyse başta aldığımız doğru bu süreçte her noktayı sonsuz defa merkez alır.

Soru 3. *Gerçel sayılar kümesinden kendisine tanımlı bir* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, tüm* x, y *gerçel sayıları için,*

$$f(x + y) \le y \cdot f(x) + f(f(x))$$

koşulunu sağlıyor. Her $x \le 0$ *için,* $f(x) = 0$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm (Mehmet Efe Akengin / İstanbul Lisesi): Verilen fonksiyonel eşitsizliğe $P(x, y)$ diyelim. Madem her $x \le 0$ için $f(x) = 0$ olduğunu göstereceğiz, işe $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \le 0$ olduğunu ispatlamakla başlayalım. Aksini varsayalım, öyle bir $c \in \mathbb{R}$ bulunsun ki $f(c) > 0$ sağlansın.

$$P(x, 0): f(x) = f(x + 0) \le 0 \cdot f(x) + f(f(x)) \text{ ise } f(x) \le f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R} \ \ldots(1)$$

Diğer taraftan $P(c, y)$: $f(c + y) \le y \cdot f(c) + f(f(c))$ sağlanıyor. Buradan hareketle, $y \to -\infty$ için $f(c + y) \to -\infty$, dolayısıyla da $f(y) \to -\infty$ ve hatta $f(f(y)) \to -\infty$ …(2) bulunur.

Şimdi (1)'i kullanarak her $y > 0$ için,

$P(-y, y)$: $f(0) = f((-y) + y) \le y \cdot f(-y) + f(f(-y)) \le y \cdot f(f(-y)) + f(f(-y)) = (y + 1) \cdot f(f(-y))$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$ bulunur. Burada $(y + 1)$ pozitif bir sayıdır ve dolayısıyla $y \to \infty$ için $-y \to -\infty$ ve (2)'den $(y + 1) \cdot f(f(-y)) \to -\infty$. Fakat bu $f(0)$'ın reel olmasıyla çelişir. Varsayımımızda çelişki elde ettik.

Demek ki $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \le 0$ …(2). Hatta eğer bir x_0 için $f(x_0) = 0$ ise (1)'de $x \to x_0$ yazarsak: $0 = f(x_0) \le f(f(x_0)) = f(0)$ bulunur. Fakat bu (2)'den $f(0) = 0$ demektir. Buradan da her $x < 0$ için (2)'yi kullanarak

$$P(x, -x): 0 = f(0) = f(x + (-x)) \le (-x) \cdot f(x) + f(f(x)) \le 0$$

elde edilir, eşitsizlikte eşitlik durumu da sağlandığından $f(x) = 0$, her $x < 0$ bulunur.

Özetlersek, bir x için $f(x) = 0$ ise soruyu çözdük. Dolayısıyla genelliği bozmadan her x için $f(x) \ne 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (2)'den $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ elde edilir. Yeniden ana eşitsizliğimize dönelim:

$$P(x, f(x) - x): f(f(x)) = f(x + (f(x) - x))$$

$$P(x, f(x) - x): f(f(x)) = f(x + (f(x) - x)) \le (f(x) - x) \cdot f(x) + f(f(x))$$

ise $x \cdot f(x) \le f^2(x)$ olmalıdır. Ayrıca $f(x) < 0$ olduğunu biliyoruz, dolayısıyla her iki tarafı $f(x)$'e bölersek $x \ge f(x)$ olacaktır. Bu eşitsizlikte $x \to f(x)$ yazarsak $f(x) \ge f(f(x))$ ki bu (2) den $f(x) = f(f(x))$ demektir. Bu eşitliği $P(x,y)$'de yerine yazarsak:

$$P(x, y): f(x + y) \le y \cdot f(x) + f(f(x)) = (y + 1) \cdot f(x)$$

bulunur. Son olarak $y < 0$ için:

$$P(0, f(y)): f(y) = f(0 + f(y)) \le (f(y) + 1) \cdot f(0) \text{ olduğundan } f(y) \le \frac{f(0)}{1 - f(0)} \ \ldots(3)$$

$$P(y, -y): f(0) = f(y + (-y)) \le ((-y) + 1) \cdot f(y) \text{ olduğundan } f(y) \ge \frac{f(0)}{1 - y} \ \ldots(4)$$

(3) ve (4)'den $\dfrac{f(0)}{1 - y} \le f(y) \le \dfrac{f(0)}{1 - f(0)}$.

İfadeyi $f(0)$'a bölüp ters çevirirsek, $f(0)$ negatif olduğundan $y \geq f(0)$ bulunur. Yani her $y < 0$ sayısı $f(0)$'dan büyük veya ona eşit olmalıdır ki bu imkansızdır, demek ki $f(x) \neq 0$ varsayımımız yanlıştır ve ispatımız biter.

İKİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 4. *$n > 0$ bir tam sayı olsun. İki kefeli bir terazimiz ve ağırlıkları $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ olan n tane ağırlığımız var. Bu ağırlıkları n hamlede birer birer ve hiçbir aşamada sağ kefe sol kefeden daha ağır olmayacak biçimde teraziye yerleştirmemiz gerekiyor. Tüm ağırlıklar teraziye konulana kadar her hamlede, teraziye henüz konulmamış ağırlıklardan birini seçerek bunu sol veya sağ kefeye yerleştiriyoruz. Bu hamleler dizisinin kaç farklı biçimde yapabileceğimizi belirleyiniz.*

Çözüm (Yiğit Yargıç / Ludvig Maximilian Universität, Munich, Teorik Fizik): Öncelikle soruya nasıl yaklaşacağımıza dair birkaç gözlemde bulunalım: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ sayı dizisinin önemli bir özelliği, dizideki her terimin kendisinden önce gelen terimlerin toplamından büyük olmasıdır. Öyleyse daha önce yerleştirilmiş ağırlıkların hepsinden daha büyük bir ağırlık yerleştireceksek bunu sol kefeye koymak zorundayız, aksi halde eğer daha önce koymak istediğimiz ağırlıktan daha büyük bir ağırlık yerleştirilmiş ise, elimizdeki ağırlığı istediğimiz kefeye koymakta serbestiz.

Çözümde her durumu ayrı ayrı incelemek zor olacağı için soruya dolaylı olarak yaklaşmayı deneyelim: Diyelim ki, her $n > 1$ sayısı için bir $f(n)$ sayısını arıyoruz, öyle ki bu $f(n)$ sayısı bize n ağırlık için yapabileceğimiz hamle dizilerinin sayısını versin. Şimdi $f(n)$ sayısını bulduğumuzu varsayarak $f(n + 1)$ değerini inceleyelim. Elimizde $2^0, 2^1, \ldots 2^{n-1}, 2^n$ ağırlıkları var. En küçük 2^0 ağırlığına bakalım. Eğer bu ağırlığı teraziye ilk önce koymak istersek, sol kefeye koymak zorunda oluruz, ilk hamle tek türlü bellidir, bundan sonra ise sanki bu ağırlığı hiç koymamışız gibi geriye kalan n tane ağırlığı $f(n)$ şekilde yerleştirebiliriz. Eğer en küçük ağırlığı ilk hamlede koymayacaksak (bu durumda diğer n ağırlıktan birinin hemen arkasından koyacağız), bu ağırlığı sağ veya sol kefeye koymak dengeyi bozmayacağı için fark etmez, yani n tane sıranın her biri için ikişer tane seçim hakkı elde ederiz. Böylece en küçük ağırlık için diğer n tane ağırlığın $f(n)$ şekilde dizilişlerinin her biri başına toplam $(2n + 1)$ tane seçim hakkı elde ederiz. Çarptığımızda bu bize $(n + 1)$ tane ağırlığın dizilişi için $f(n + 1) = (2n + 1)\cdot f(n)$ sonucunu verir. $n = 1$ olsa, elimizde tek bir ağırlık olur, bunu sol kefeye koymak zorunda oluruz ve $f(1) = 1$ olur. Tümevarımla $f(n + 1) = (2n + 1)\cdot f(n)$ ilişkisini kullanarak buluruz ki, her n için $f(n)$ sayısı, ardışık ilk n tek doğal sayının çarpımına eşittir.

Yani $f(n) = \prod_{i=0}^{n-1} (2i+1)$ bulunur.

Soru 5. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini ve $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam tamsayılar kümesini göstermek üzere, bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olsun. Tüm m, n tam sayıları için, $f(m) - f(n)$ farkının $f(m - n)$ ile bölündüğünü varsayalım. $f(m) \leq f(n)$ koşulunu sağlayan tüm m, n tam sayıları için, $f(n)$ sayısının $f(m)$ ile bölündüğünü kanıtlayınız.

Çözüm (Mehmet Efe Akengin / İstanbul Lisesi): Öncelikle şu iki gözlemi yapalım:

i) Her m tamsayısı için $f(m) \mid f(0)$:

$f(m) = f(m-0) \mid (f(m) - f(0))$ olduğunda $f(m) \mid f(0)$ olacaktır.

ii) Her n tamsayısı için $f(n) = f(-n)$:

$f(-n) = f(0-n) \mid (f(0) - f(n))$ ve $f(-n) \mid f(0)$ olduğundan $f(-n) \mid f(n)$ olacaktır. Benzer şekilde $f(n) \mid f(-n)$, demek ki $f(-n) = f(n)$.

Şimdi varsayalım $f(m) < f(n)$ ve $f(m)$, $f(n)$'i bölmüyor. Çelişki elde edeceğiz. Bunu yaparken $f(m)$, $f(n)$ ve $f(m+n)$ arasındaki bölünebilirlik ilişkilerini inceleyeceğiz.

$$(f(m+n) = f(n-(-m))) \mid ((f(n) - f(-m)) = f(n) - f(m))$$

Burada $f(n) > f(m)$ olduğundan $f(m+n) \le f(n) - f(m)$ …($*$)

$f(n) \mid (f(m+n) - f(m))$ olduğu açıktır. Burada üç durum vardır:

a) Eğer $f(m+n) = f(m)$ ise, $f(m) \mid (f(m+n) - f(n) = f(m) - f(n))$ bulunur ki bu $f(m) \mid f(n)$ demektir, varsayımımızla çelişir.

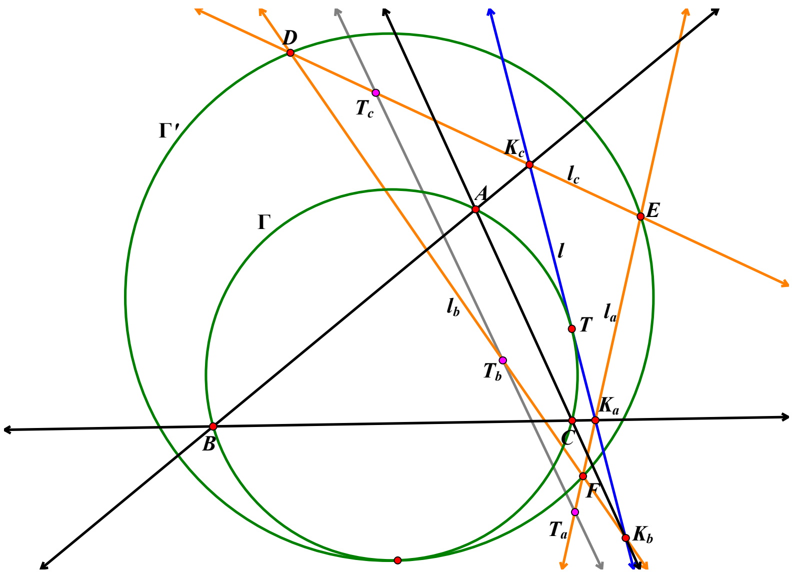
b) Eğer $f(n) \le f(n+m) - f(m)$ ise, ($*$)'ı bu eşitsizliğe eklersek: $f(n) + f(m+n) \le f(m+n) + f(n) - 2f(m)$ bulunur ki bu $2f(m) \le 0$ demektir, f fonksiyonunun pozitif değerler almasıyla çelişir.

c) Eğer $f(n) \le f(m) - f(n+m)$ ise, ($*$)'ı bu eşitsizliğe eklersek: $f(n) + f(m+n) \le f(n) - f(m+n)$ bulunur, fakat bu yine f fonksiyonunun pozitif değerler almasıyla çelişir.

Her üç durumda da çelişki bulduk, demek ki varsayımımız yanlıştır. $f(m) < f(n)$ için $f(m) \mid f(n)$. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Soru 6. *ABC, çevrel çemberi Γ olan dar açılı bir üçgen olsun. l, Γ'ya teğet bir doğru ve l'nin BC, CA ve AB doğrularına göre yansıtılmasıyla elde edilen doğrular da sırasıyla l_a, l_b, l_c doğrularının belirlediği üçgenin çevrel çemberinin Γ çemberine teğet olduğunu gösteriniz.*

Çözüm (Ufuk Kanat / Özel Samanyolu Fen Lisesi):



Öncelikle l nin Γ ya teğet olduğu noktaya T diyelim.

$l_b \cap l_c = \{D\}$, $l_c \cap l_a = \{E\}$, $l_a \cap l_b = \{F\}$, $l \cap BC = K_a$, $l \cap CA = K_b$, $l \cap AB = K_c$ olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberi de Γ' olsun.

T'nin BC, CA, AB doğrularına göre simetriği olan noktalar sırasıyla T_a, T_b, T_c olsun. $T \in \Gamma$ olduğundan T'nin ABC üçgeninin kenarlarına çizilen dikme ayakları doğrusal olur (Simson doğrusu[3]). T_a, T_b, T_c noktaları T'nin oluşturduğu Simson doğrusunun T merkezli 2:1 oranlı homotetisi[4] üzerinde olduğundan T_a, T_b, T_c noktaları doğrusaldır.

$$m(CAB) = A,\ m(ABC) = B,\ m(BCA) = C$$

olsun.

$$m(FDE) = 180° - 2A,\ m(DEF) = 180° - 2B,\ m(EFD) = 180° - 2C$$

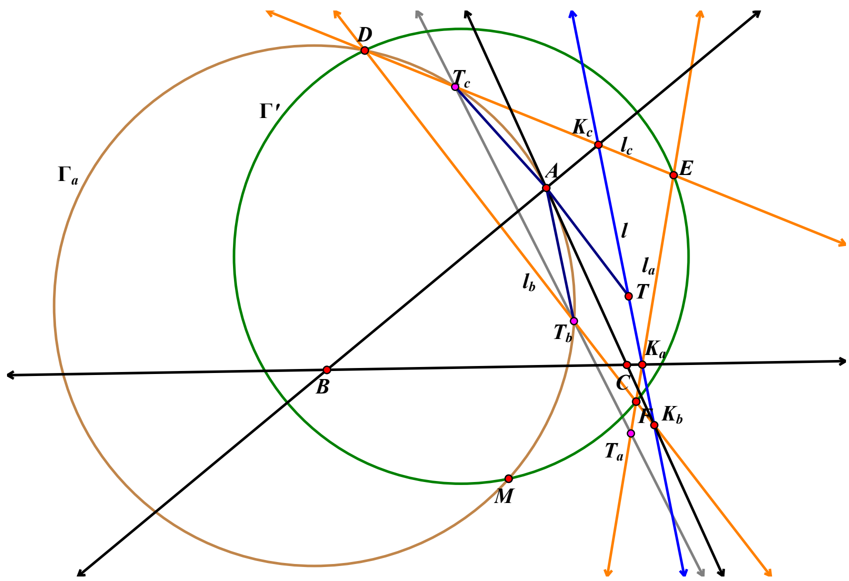
olduğunu ispatlayalım. T'nin bulunduğu yer çözümü değiştirmeyeceğinden çözümü yukarıdaki şekle göre yapalım. $m(AK_cT) = \alpha$ olsun. l_c doğrusu l'nin AB doğrusuna göre simetriği olduğundan $m(AK_cD) = m(AK_cT) = \alpha$ olur. Öte yandan

$$m(K_cK_bA) = m(BAK_b) - m(BK_cK_b) = A - \alpha$$

olup l_b doğrusu l'nin CA doğrusuna göre simetriği olduğundan $m(AK_bD) = m(AK_bK_c) = A - \alpha$ olur. Buradan

$$m(FDE) = 180° - m(DK_cK_b) - m(DK_bK_c) = 180° - 2\alpha - 2(A - \alpha) = 180° - 2A$$

buluruz.



Aynı şekilde $m(DEF) = 180° - 2B$, $m(EFD) = 180° - 2C$ eşitliklerini elde ederiz.

AT_bDT_c, BT_cET_a, CT_aFT_b dörtgenlerinin kirişler dörtgeni olduğunu ispatlayalım. T_b ve T_c noktaları T'nin sırasıyla CA ve AB ye göre simetriği olan noktalar olduğundan

$$m(CAT) = m(CAT_b) \text{ ve } m(BAT) = m(BAT_c)$$

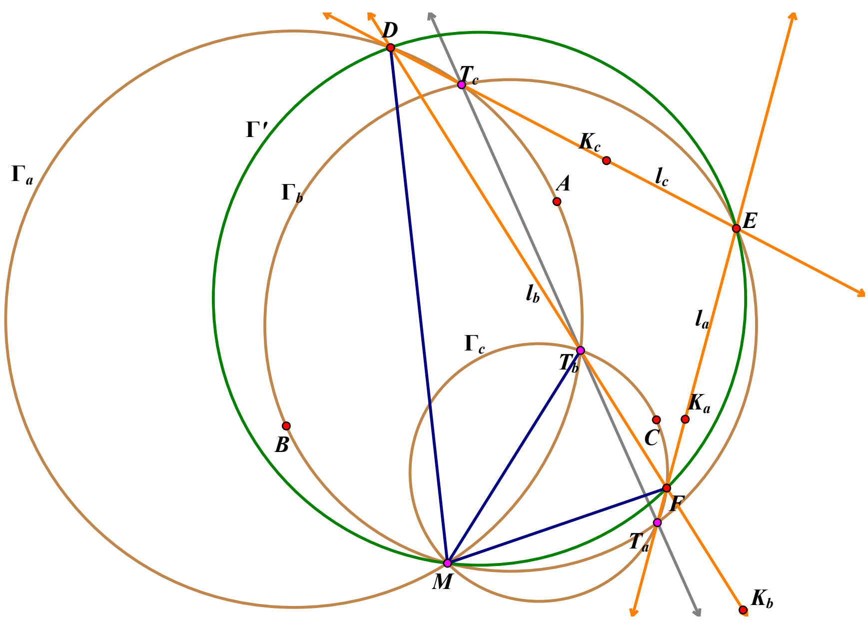
eşitlikleri sağlanır. $m(CAT) = x$ dersek

$$m(BAT_b) = A - m(CAT_b) = A - m(CAT) = A - x$$

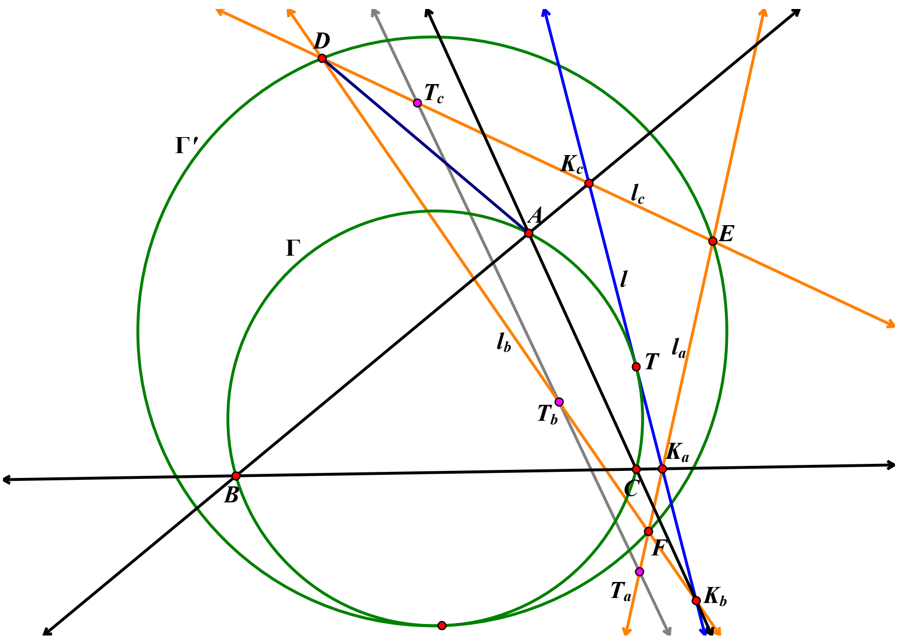
olur. Buradan

[3] MD-2008-IV, sayfa 78'de Teorem 10'a bakınız.
[4] MD-1991-IV, sayfa 3'te Hüseyin Demir'in makalesine bakınız.

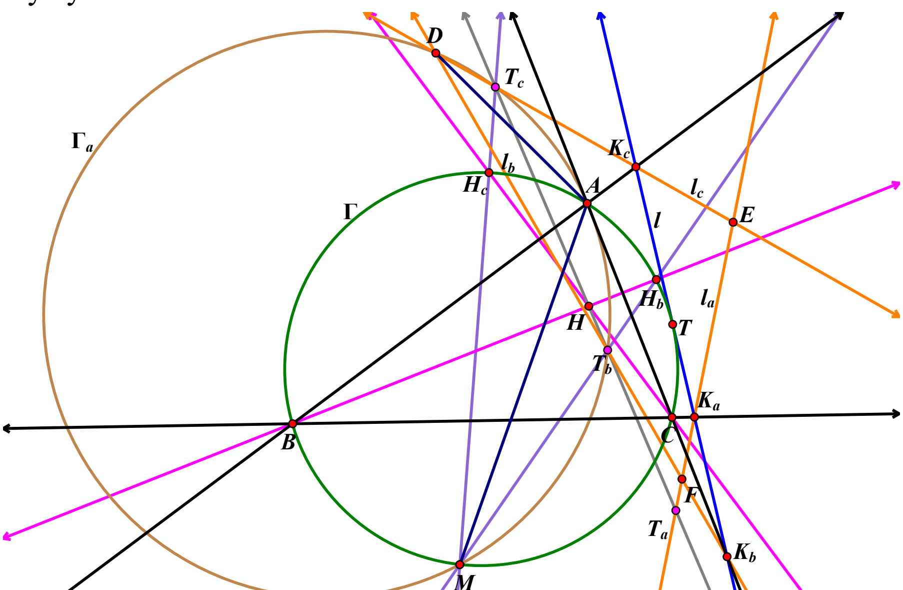
$$m(T_bAT_c) = m(T_bAB) + m(BAT_b) = m(BAT) + m(BAT_b) = m(BAT) + (A - x) =$$
$$m(BAT_b) + m(T_bAT) + (A - x) = (A - x) + 2m(CAT) + (A - x) = (A - x) + 2x + (A - x) = 2A$$
elde ederiz. $m(T_cDT_b) = 180° - 2A$ olduğunu ispatlamıştık.
Buradan
$$m(T_bAT_c) + m(T_cDT_b) = 180°$$
ve böylece $m(AT_bDT_c)$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olduğunu görürüz. Aynı şekilde BT_cET_a, CT_aFT_b dörtgenlerinin kirişler dörtgeni olduğunu söyleyebiliriz. AT_bDT_c, BT_cET_a, CT_aFT_b dörtgenlerinin çevrel çemberlerine sırasıyla Γ_a, Γ_b, Γ_c diyelim.



Γ', Γ_a, Γ_b, Γ_c çemberlerinin noktadaş olduğunu ispatlayalım. $\Gamma_a \cap \Gamma_b = \{M\}$ olsun.
$$m(DMF) = m(DMT_b) + (T_bMF)$$
olup Γ_a ve Γ_b çemberleri yardımıyla
$$m(DMT_b) + m(T_bMF) = m(ET_cT_b) + m(ET_aT_b) = 180° - m(T_aET_c) = 180° - m(DEF)$$
ve böylece $m(DMF) = 180° - m(DEF)$ elde ederiz. O zaman M noktası Γ' üzerindedir. Aynı şekilde M noktasının Γ_c üzerinde olduğunu da söyleyebiliriz. O halde Γ', Γ_a, Γ_b, Γ_c çemberleri noktadaştır.



Şimdi de AD, BE, CF doğrularının DEF üçgeninin iç açıortayları olduklarını gösterelim. DK_bK_c üçgeninde (daha önce de gösterdiğimiz gibi) AK_b ile AK_c iç açıortaylardır. O zaman A noktası DK_bK_c üçgeninin iç merkezidir. T'nin durumlarına göre A noktası DK_bK_c üçgeninin dış merkezi de olabilir. Böylece durum nasıl olursa olsun AD doğrusu K_cDK_b açısının iç açıortayıdır. Buradan AD doğrusunun DEF üçgeninin D açısının iç açıortayı olduğunu buluruz. Aynı şekilde BE, CF doğrularının DEF üçgeninin iç açıortayları olduklarını söyleyebiliriz.



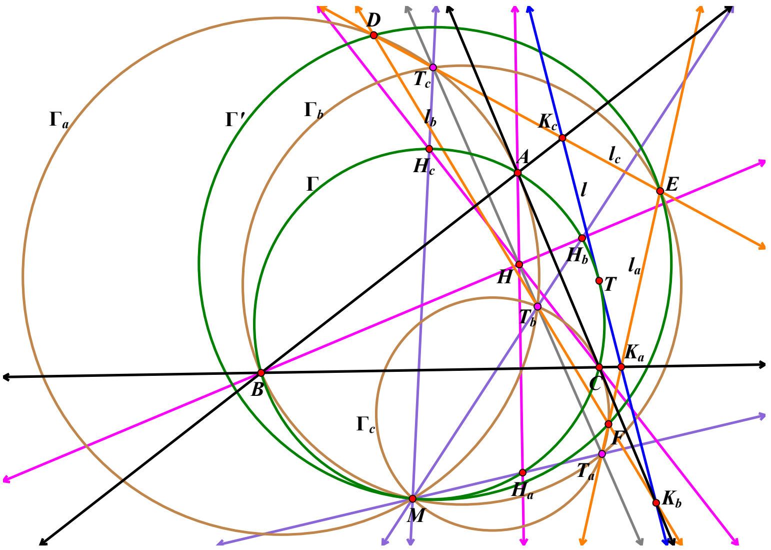
Γ', Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ çemberlerinin noktadaş olduğunu yani M noktasının Γ çemberinin de üzerinde olduğunu ispatlayalım. ABC üçgeninin diklik merkezi H olsun.

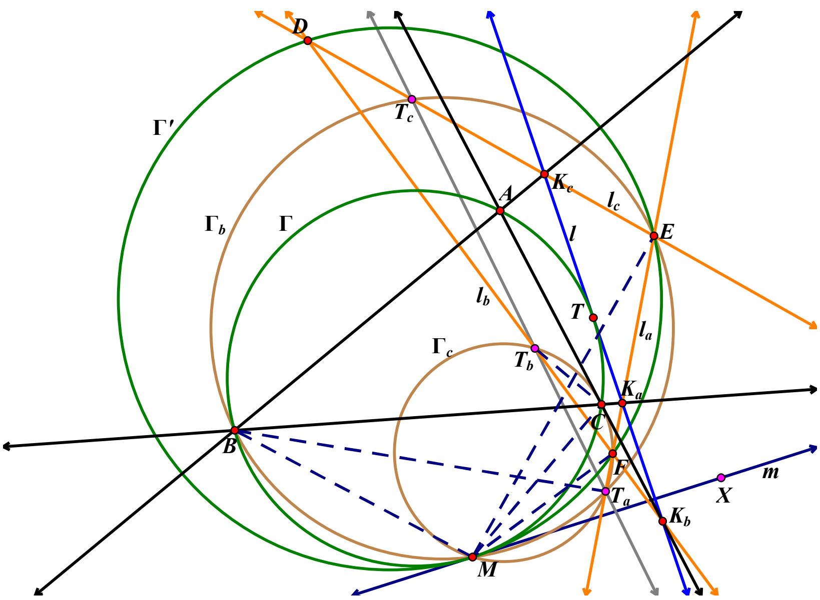
$$AH \cap \Gamma = \{A, H_a\},\ BH \cap \Gamma = \{B, H_b\},\ CH \cap \Gamma = \{C, H_c\}$$

diyelim. $\Gamma_a \cap \Gamma = \{A, M'\}$ olsun. Γ_a çemberinden $m(AM'T_b) = m(ADH)$ buluruz. AD doğrusu EDF açısının açıortayı olduğundan

$$m(ADH) = (180° – 2A)/2 \; = 90° – A$$

olup $m(AM'T_b) = 90° – A$ olur. Öte yandan $m(AM'H_b) = m(ABH_b)$ olduğunu Γ çemberi yardımıyla biliyoruz. $m(ABH_b) = 90° – A$ olup $m(AM'H_b) = 90° – A$ elde ederiz. Buradan $M' \in H_bT_b$ buluruz. Aynı şekilde $M' \in H_cT_c$ olduğunu buluruz. Yani H_bT_b doğrusu ile H_cT_c doğrusu Γ üzerinde kesişiyor ve bu kesişim Γ_a üzerindedir. Yaptıklarımızın aynısını Γ_b için yaparsak H_cT_c doğrusu ile H_aT_a doğrusunun Γ üzerinde kesiştiğini ve bu kesişimin Γ_b üzerinde olduğunu elde ederiz. O zaman H_aT_a, H_bT_b, H_cT_c doğruları Γ üzerinde kesişiyor olup bu kesişim Γ_a, Γ_b, Γ_c çemberlerinin de üzerindedir. $\Gamma_a \cap \Gamma_b \cap \Gamma_c = \{M\}$ olup M noktası Γ çemberinin de üzerindedir.





Son olarak Γ ile Γ′ çemberlerinin birbirlerine M noktasında teğet olduğunu ispatlayıp soruyu sonlandıralım. Γ çemberine M noktasında teğet olan doğruya m diyelim. M'nin F'den m'ye çizilen dikme ayağının bulunduğu tarafında kalan bir X noktasını alalım.

$$m(FMX) = m(CMX) – m(CMF)$$

olup Γ çemberinde teğet-kiriş açıların yardımıyla $m(CMX) = m(CBM)$ eşitliğini, Γ_c çemberindeki açılar yardımıyla $m(CMF) = m(CT_aF)$ eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$m(FMX) = m(CBM) - m(CT_aF) = m(CBT_a) + m(T_aBM) - m(CT_aK_a)$$

elde ederiz. T'nin BC'ye göre simetriği T_a olduğundan

$$m(CT_aK_a) = m(CTK_a) \text{ ve } m(CBT_a) = m(CBT)$$

elde ederiz. O zaman

$$m(FMX) = m(CBT) + m(T_aBM) - m(CTK_a)$$

olur. l doğrusu Γ çemberine T noktasında teğet olduğundan dolayı $m(CBT) = m(CTK_a)$ olup $m(FMX) = m(T_aBM)$ buluruz. Γ_b çemberindeki açılardan

$$m(T_aBM) = m(T_aEM) = m(FEM)$$

ve sonuç olarak $m(FMX) = m(FEM)$ eşitliğini buluruz. Bu durumda m doğrusu Γ' çemberine M noktasında teğet olur. O zaman Γ çemberi ile Γ' çemberleri birbirlerine M noktasında teğettir. Böylece ispatı sonlandırmış olduk.