

Turán Teoremi - Yeniden

Hikmet Seha Öztürk / hikmetsehaoturk@gmail.com

İhsan Yücel / ihsanyucel19@gmail.com

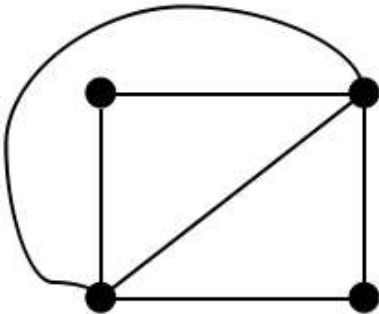


Matematik Dünyası Dergisi'nin 2013-I sayısında Turán Teoremi hakkında bir yazı yayınlanmıştır. Yazıda Turán Teoremi bir çizgede 3-gen oluşma sınırını hesaplamak için kullanılmış, 3 yerine daha büyük sayılar için ise kullanılabileceği belirtilmişti. Bu yazıda Turán Teoremi'nin daha genel durumunu, yani 3 yerine k sayısı yazıldığında neler olacağını inceleyeceğiz.

Çizgenin ne olduğu konusunda hepimizin az çok bir fikri vardır. Bir çizge, köşeler (noktalar) ve bu köşeler arasındaki bağlantılar (kenarlar) dan oluşan bir çeşit grafikdir. Bu grafikte noktanın ne kadar yüksekte olduğu, ya da kenarların ne kadar uzun olduğunun hiçbir önemi yoktur. Tek önemli olan ele aldığımız 2 noktanın kenarın birbiriyle bağlantılı veya bağlantısız olmasıdır. Bir noktanın bağlantı sayısını o noktanın derecesi olarak ifade ederiz.

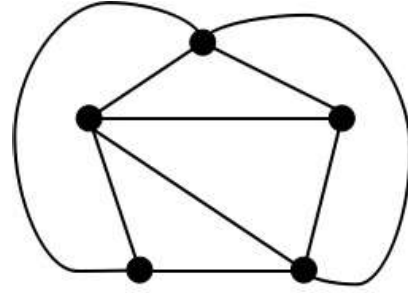
Pek çok çeşit çizge vardır ancak bu yazıda bahsettiğimiz çizgelerde bir nokta kendisiyle bağlantılı olamaz ve 2 nokta arasında en fazla bir çizgi olabilir. Bir çizge düzlemsel olmak zorunda değildir. Hatta ne yaparsak yapalım düzlemsel olamayacak çizgeler vardır.

4 nokta ve 6 bağıntıdan (kenar) oluşan bir çizgeyi ele alalım. Bu çizge Şekil 1'deki gibi pekâlâ çizilebilir.



Şekil 1

Şimdi de 5 nokta ve 9 kenardan oluşan bir çizgeyi ele alalım. Bu da pek zorlanmadan bir düzleme çizilebilir:



Şekil 2

Peki bu çizgeye bir kenar daha ekleyecek olursak? İşte o zaman çizge düzlemsel olarak çizilemez olur ve bir çizgi diğerlerinin altından veya üstünden geçmek zorunda kalır. Yani 5 köşeli bir çizgede 10 veya daha fazla kenar varsa (daha fazla olamaz ama yine de varsa diyelim) bu çizge düzlemsel olamaz.

Gördüğümüz gibi bir çizgede köşe sayısı sabit tutularak kenar sayısı arttırıldığı zaman belli bir noktadan sonra çizgemiz düzlemsel olmaktan çıkmak zorunda kalıyor. Benzer şekilde çizgede kenar sayısı arttıkça çizgede üçgenler oluşmak zorunda kalır. 2013-I sayısındaki makaleden bir çizgedeki üçgen oluşma sınırını Turán Teoremi sayesinde hesaplayabileceğimizi biliyoruz. Bu yazıdaki amacımız, üçgen yerine "her biri birbiriyle bağlantılı olan k nokta" (kısaca K_k diyelim) ifadesi yazıldığında sınırı nasıl hesaplayacağımızı bulmak olacak.

Önce 3 için cevaba nasıl ulaştığımızı hatırlayalım. Turán Teoremi'ni hiç kullanmadan, sadece çizgemizi 2 parçaya ayırarak bunun üstesinden gelebiliriz. Daha iyi anlaşılabilmesi için bunu bir örneklerle gösterelim:

10 köşeli ve hiç üçgen içermediği bilinen bir çizgede en fazla kaç kenar olabileceğini hesaplayalım. Çizgemizi 5 nokta bir tarafta ve 5 nokta diğer tarafta olmak üzere 2 gruba ayıralım (Çarpımlarının yüksek olması için eşit dağıttık). Şimdi her noktayı, karşı gruptaki tüm noktalarla birleştirelim. Bunun sonucunda hiçbir nokta kendi grubundaki bir diğer nokta ile bağlantılı olmamış olur ancak her nokta karşı gruptaki tüm noktalarla bağlantılıdır. Herhangi 3 noktayı ele aldığımızda, bunlardan en

az ikisi aynı grupta olacaktır. Aynı grupta olanların arasında bağlantı olmadığından bu 2 nokta arasında da bağlantı olmamış olur. Yani hangi 3 noktayı seçersek seçelim 3'ünün de birbiriyle bağlantılı olduğu bir durum yoktur. Dolayısıyla çizgemizde hiç üçgen olmaz. 26'ncı bağlantıyı eklediğimiz anda bu düzen bozulacağından sınır $5 \times 5 = 25$ 'tir. Turán Teoremi'ni kullanmadan çözebildik. Ancak 3 yerine daha büyük bir sayı verildiğinde cevaba nasıl ulaşacağımızı hala bilmiyoruz.

Aslında onun da cevabını verdik. Tek yapmamız gereken 3 yerine verilen bir k sayısı için çizgemizi 2 değil $k-1$ parçaya ayırmak. Yine aynı mantıkla her noktayı sadece kendi kümesinde olmayan tüm noktalara bağladığımızda hiç K_k olmamasını sağlamış oluruz.

Çizgemizin köşe sayısı n olsun ve hiç K_k içermediği takdirde en fazla kaç kenara sahip olabileceğini bulalım. n 'nin $k-1$ ile bölümünde bölüm x , kalan y olsun. Şimdi $(k-1)x$ noktayı seçelim ve her birinde x nokta olacak şekilde $k-1$ gruba ayıralım. Kalan y noktayı da kümelerin y tanesine birer tane olacak şekilde dağıtalım. Sonuçta y farklı kümede $x+1$ nokta ve $k-y-1$ farklı kümede x nokta bulunmuş olur. Şimdi her noktayı kendi kümesinde olmayan tüm noktalarla bağlayalım. Buna göre:

$$\begin{aligned} a_1 &= (n - (x+1))(x+1) \\ a_2 &= (n - (x+1))(x+1) \\ &\vdots \\ a_y &= (n - (x+1))(x+1) \\ a_{y+1} &= (n - x)x \\ &\vdots \\ a_{k-1} &= (n - x)x \end{aligned}$$

olur. Buradan toplam kenar sayısı:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{2}$$

olarak bulunur. Ancak bu ifadeyi düzenlemek görüldüğü gibi kadar kolay değil. Çok fazla zaman ve gereksiz işlem gerektirmesinin yanı sıra istediğimiz gibi bir ifade elde edeceğimizin garantisini de yok. Bu yüzden ufak bir hileye başvuralım.

Burada $n = (k-1)x$ diyerek y 'yi saf dışı bırakalım. Bu işlemin sonucunda tabii ki x tamsayı olma özelliğini kaybedecektir. Ancak biraz düşünerek bunun bir öneminin olmadığını siz de fark edebilirsiniz. Hatırlayın, amacımız tam olarak şuydu: "Öyle bir A ifadesi bulmalıyız ki çizgemizde A 'dan

fazla kenar olduğunda K_k olduğunu garanti edelim. Aynı zamanda $[A]$ (A 'nın tamdeğeri) kenar içeren ve K_k içermeyen bir çizge de bulunabilsin." Bu durumda A 'nın tamsayı olup olmaması bir şey değiştirmez. Örneğin $A = 32,445454545\dots$ olsa bile biz bu çizge için sınır sayının 32 olduğu yorumunu yapabiliriz. Şimdi çizgemizi $k-1$ gruba ayıralım ve her grubun noktalarını diğer tüm gruplardaki noktalarla birleştirelim. Her gruba x nokta düşeceğinden:

$$\begin{aligned} a_1 &= (n - x)x \\ a_2 &= (n - x)x \\ &\vdots \\ a_{k-1} &= (n - x)x \end{aligned}$$

olacaktır. Toplam bağlantı sayısı ise aynı yoldan:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{2} = \frac{1}{2}(n - x)(x(k - 1)) = A$$

olarak bulunur. Burada $x(k - 1) = n$ olduğunu bildiğimizden basitçe $x = n/(k - 1)$ yorumunu yapabiliriz. Bu iki ifadeyi toplam bağlantı sayımıza yerleştirirsek:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(n - \frac{n}{k-1}\right)n \\ &= \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu da Turán Teoremi'nin ta kendisidir! Gerçekten de tahmin ettiğimiz kadar zor olmadı değil mi? Ne yazık ki henüz değil. Çünkü hala bu ifadenin sınır olduğundan emin değiliz. Yani bu ifadenin üzerindeki tüm sayılar için çizgede K_k oluşuyor bile olsa bu yeterli bir kanıt değil. İspatı tamamlamak için tümevarım yapmamız gerekiyor. Tümevarım yapmak için yeniden bir çizge oluşturacağız, çünkü şu anki çizgemizi öyle gruplara ayırdık ki, gruplardaki nokta sayıları tamsayı bile olmadı. Örneğin bir gruba 2,5 nokta düşüyordu. Bu ifade matematiksel işlemlerde her ne kadar sorun çıkarmasa da tümevarım yapmamızı engeller. Şimdi yeni bir çizge tanımlayalım.

Çizgemiz G , kenar sayısı E olsun. G çizgesin K_k içermeyen şekilde en fazla sayıda kenar içerdiğini varsayalım. Bu durumda G mutlaka K_{k-1} içeriyordur. Bu K_{k-1} 'lerden bir tanesini ele alalım ve bunu B kümesi olarak tanımlayalım. G çizgesinin B kümesi dışında kalan köşelerini de C kümesi olarak tanımlayalım. Buna göre, e_b ve e_c sırasıyla köşeleri B ve C kümelerinden olan kenar sayısı, e_{bc} de bir köşesi B 'de, diğer köşesi

C' 'de olan kenarların sayısı olsun. Bu durumda $e_b + e_c + e_{bc} = E$ ve

$$e_b = \binom{k-1}{2}$$

olduğu açıktır.

Şimdi de tümevarım yapmak için küçük çizgenin (C kümesi) teoremini sağladığını varsayalım ve tüm çizgenin de köşeler kümesini sağladığını ispatlamaya çalışalım. Tümevarımımızdan dolayı:

$$e_c \leq \frac{(n-k+1)^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

bulunur.

Eğer C kümesinden bir nokta B kümesindeki $k-1$ noktanın tümüyle bağlantılı ise bu k nokta K_k oluştururlar. Yani C kümesinden herhangi bir nokta B kümesinden en fazla nokta ile bağlantılı olabilir. C kümesinde $n-k+1$ nokta bulunduğundan:

$$e_{bc} \leq (n-k+1)(k-2)$$

bulunur. Bunları bir araya koyarak

$$E = e_b + e_c + e_{bc} \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

bulunur. Böylelikle bir önceki yazıda açık kalan kapıyı kapatmış oluyoruz.

Ancak hala Turán Teoremi'nin nerelerde ve nasıl kullanıldığını görmedik. Turán Teoremi'nin birçok farklı kullanım alanı olduğumuzdan onu kullanabileceğimiz bir soru bulmak için uzaklara bakmamız gerekmiyor. Örneğin Matematik Dünyası'nın 2011-IV sayısının 87. sayfasındaki Y433 numaralı soruya bir göz atalım:

Problem 1. *Bir futbol liginde 15 takım bulunmaktadır. Herhangi 3 takım alındığında bunlardan aralarında maç yapmış olan ikisinin bulunabilmesi için en az kaç maç yapılmalıdır?*

Eğer bu soruyu Turán Teoremi olmadan çözmeyi düşünüyorsanız, unuttum derim. Israrcı olanlar bahsi geçen sayıyı açıp çözüme bakabilir, ancak burada kolay yoldan çözüme gideceğiz.

Soruyu çizgeye dönüştürelim. Takımlar köşeler olsun ve maç yapmış olan takımlar arasına kenar çizelim. Çizgemizde herhangi üç noktada en az bir kenar bulunmuş olur. Amacımız Turán teoremi yardımıyla bu soruyu çözmek ancak bu şekilde Turán teoremini kullanamayız. Çünkü Turán Teoremi bize en az değil en fazla kenar sayısını verir. Bu durumda çizgeyi terse çevireceğiz. Yeni

çizgemizde maç yapmamış olan takımlar arasına çizgi çizilmiş ve herhangi 3 noktayı ele aldığımızda aralarında en fazla iki çizgi çizilmiş olur, yani hiç üçgen oluşmayan bir çizge elde etmiş oluruz. Bu durumda Turán teoremini kullanarak, çizgemizde $15^2/4 = 56,25$ (Bunu 56 olarak düşünebiliriz) veya daha az kenar olduğunu elde ederiz. Toplam $\binom{15}{2} = 105$ tane ikili olduğundan, en az $105 - 56 = 49$ tane kenar olmayan ikili vardır. Yani en az 49 maç yapılmıştır.

Bu soruda fark edeceğiniz üzere anahtar nokta çizgeyi ters çevirmektir. Bunu yaptığımız anda soru Turán Teoremi için açık hedef haline dönüştü! Bunun gibi örnekler zamanında olimpiyatlarda da sorulmuş. İşte bir örnek:

Problem 2. *Bir çember üzerinde 21 nokta veriliyor. Çemberin merkeziyle aralarındaki açı 120° veya daha küçük olan en az 100 nokta ikilisi bulunduğunu kanıtlayın.*

Bu soruyu da çizgeye dökeceğiz ama biraz farklı bir şekilde. Noktalar yine köşeler olsun. Bu sefer aralarındaki açı 120° veya daha çok olan noktaların arasına çizgi çekeceğiz. Böylelikle çizgemizde hiç üçgen olmamasını sağlamış oluyoruz (Eğer $A-B$ ve $A-C$ nin merkezle aralarındaki açılar 120° 'den büyükse $B-C$ 'nin merkezle arasındaki açı 120° 'den küçük olur). Turán teoremine göre hiç üçgen içermeyen 21 köşeli bir çizgede en fazla

$$\lfloor 21^2/4 \rfloor = 110$$

kenar olabilir. Yani bu çemberde merkezle aralarındaki açı 120° 'den fazla olan en fazla 110 ikili bulunabilir. $\binom{21}{2} = 210$ olduğundan en az tane aralarındaki açı 120° veya daha düşük olan nokta ikilisi vardır.

Gördüğümüz gibi bir önceki soruda yaptığımızın aynısını burada da yapabildik. Turán Teoremi'ni bilen birisi için bu soruların tek zorluğu, soruyu Turán Teoremi'nin kullanılabileceği şekle sokmak. Peki ya buna gerçekten zorluk denebilir mi? Bu sorular için belki cevabımız hayır olabilir, ancak soruyu Turán Teoremi'ne benzetmek, hatta sorunun Turán Teoremi ile çözülebileceğini fark etmek bile bazen yeterince zor olabiliyor. Bunu bir örnekle açıklasak daha iyi olacak:

Problem 3. *$A, S = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\}$ kümesinin 101 elemanlı bir altkümesi olsun. İspatlayınız ki A nasıl olursa olsun öyle $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ sayıları bulunur ki $A_j = \{x + t_j : x \in A\}$ kümeleri ikişerli olarak kesişmez.*

$A = \{a_1, \dots, a_{101}\}$ ve $a_1 < a_2 < \dots < a_{101}$ olsun. Yönsüz bir çizge çizelim ve $(A+i)$ ve $(A+j)$

kümeleri kesişmiyor ise i ve j arasına bir kenar koyalım. Çizgemizin 10^6 köşesi olacaktır. Eğer herhangi bir $(A + x)$ kümesi ile $(A + y)$ kümesi kesişmiyor ise $x - y$, hiçbir $a_i - a_j$ 'ye eşit olmuyor anlamına gelir (Şöyle açıklayalım: A kümesinin elemanlarından ikisi 2 ve 5 olsun. Eğer $x = y + 3$ olursa $(A + x)$ kümesinin birinci elemanı ile $(A + y)$ kümesinin ikinci elemanı aynı olmuş olur, dolayısıyla bu kümeler kesişmiş olur. Kümeler kesişmiyor ise $x - y$, herhangi $a_i - a_j$ 'ye eşit olmuyor demektir). Bir A kümesi için a_i ve a_j , 101×100 şekilde seçilebilir. Yani bir x sayısını ele aldığımızda (toplamda 101×100 tane $a_i - a_j$ durumu olduğundan) $x - y$ 'yi $a_i - a_j$ 'ye eşit yapacak 101×100 tane y sayısı vardır. Bu 101×100 durum dışında $x - y$, $a_i - a_j$ 'ye eşit olmadığından kalan durumların hiçbirinde ve kümeleri kesişmemiş olur. Kalan durumlar 101×100 tane olduğundan bu x köşesinin derecesi en fazla $10^6 - 101 \cdot 100$ olur.

Aynı zamanda çizgemizde 106 köşe olduğundan en az

$$\frac{10^6(10^6 - 101 \cdot 100)}{2}$$

kenar olduğunu buluruz. Soruda bizden istenen bu çizgede K_{100} bulunduğunu ispatlamak. Turán teoremine göre 10^6 köşeli bir çizgede

$$(1 - \frac{1}{100-1}) \frac{(10^6)^2}{2} = \frac{98 \cdot 10^{12}}{99 \cdot 2}$$

sayısından daha fazla kenar varsa bu çizge mutlaka K_{100} içerir. Çizgemizde zaten

$$\frac{10^6(10^6 - 101 \cdot 100)}{2} > \frac{98 \cdot 10^{12}}{99 \cdot 2}$$

kenar olduğundan çizgemizde mutlaka K_{100} vardır. Bu 100 nokta kümelerinin ikiye bölünebilir olarak kesişmemesini sağlayan $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ sayılarıdır. İspat tamamlanmıştır.

Yeterince zor bir soru olabilir, ancak çözüm yine aynı. Gördüğümüz kadarıyla değişen pek bir şey yok. Şu ana kadar bu düşünceyle geldiyse haklı sayılabilirsiniz. Daha doğrusu sayılabilirsiniz. Çünkü bu düşüncelere de yine bir olimpiyat sorusu cevap veriyor:

Problem 4. Bir ülkede 2001 şehir var. Bunlardan her birinden en az 1600 farklı şehre direkt otobüs bağlantısı var. Şehirler nasıl bağlanırsa bağlansın tümü birbirleriyle bağlantılı olan n şehir bulmayı garantileyebiliriz n en fazla kaç olabilir?

Bu soruda dikkat ederseniz şimdiye kadarki sorulara göre bir terslik var. Soruda n yerine bir sayı verip 1600 yerine bilinmeyen konmuş olsaydı doğrudan Turán Teoremi yardımıyla çözüme

ulaşabilirdik. Çözüme ulaşmak için teoreminin geriye doğru işlenmesini sağlamalıyız. Bunun için yardımcı teoreminizi tanımlayalım:

Yardımcı Teorem: n noktalı bir çizgede her biri birbirleriyle bağlantılı k nokta bulmak mümkün değilse bu çizgede derecesi en fazla

$$\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \rfloor$$

olan bir nokta mutlaka vardır.

İspatı basit. Aksini varsayalım. Bu durumda her noktanın derecesi $\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \rfloor$ veya daha fazla olmak zorunda olur. Çizgedeki toplam kenar sayısı tüm noktaların derecelerinin toplamının yarısı olur, bu da en az

$$\frac{\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \rfloor}{2}$$

ifadesine eşittir. Bu çizgede Turán Teoremi uygulanabilir. Buna göre çizgede hiç K_k olmadığından kenar sayısı en fazla:

$$\lfloor \frac{\frac{k-2}{k-1} n^2}{2} \rfloor$$

olabilir. Yani kenar sayımız 1. ifadeden büyük ve 2. ifadeden küçük olmalı. Ancak denklemsel olarak baktığımızda 2. ifadenin 1. ifadeden daha küçük olduğunu açıkça görebiliriz. Yani çelişki elde ettik. Aksini varsaydığımız ifade kendisiyle çeliştiğine göre ispatımız tamamlanmıştır. Artık yardımcı teoreminizi çözümde kullanabiliriz.

Yardımcı teoreme göre bu çizge K_n içermiyorsa derecesi $\lfloor \frac{n-2}{n-1} 2001 \rfloor$ veya daha az olan bir nokta bulunabilir. Öte yandan tüm noktaların derecesi $\lfloor \frac{n-2}{n-1} 2001 \rfloor$ 'den fazlaysa bu, çizgemizin mutlaka K_n içerdiği anlamına gelir. Yani bu sayı 1600'den küçükse tüm köşelerin derecesi 1600 veya daha fazla olduğundan çizgemiz mutlaka K_n içermiş olur. $\lfloor \frac{n-2}{n-1} 2001 \rfloor < 1600$ olacak şekilde n en fazla 5 olabilir. Bu durumda cevap 5 olacaktır.

Şimdi Turán Teoremi'ni çok farklı bir ortamda kullanacağız. 2 renkli bir çizgede!

Problem 5. Bir ülkede $n \geq 5$ tane şehir var ve bunların arasındaki uçuşlar iki havayolu şirketi tarafından işletiliyor. Tüm uçuşlar çift taraflı ve iki şehir arasında en fazla bir uçuş olabiliyor. Devlet (herhangi bir şehirden başlayıp tek bir havayolunu kullanarak başladığımız şehre dönecek şekilde) tüm döngülerin en az 6 şehirden oluşmasını istediğine göre toplamda en fazla $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ uçuş olabileceğini ispatlayın.

Soruda verilenleri köşeler şehirler ve kenarlar uçuşlar olacak şekilde çizmeye aktaralım. Uçuşlar iki şirket tarafından işletildiği için çizgemizi mavi ve kırmızı olmak üzere iki renge boyayalım. Soruda

çizgemizde üçlü, dörtlü ya da beşli döngü olmayacağı verilmiş.

Çizgemizin kenar sayısı E olsun. Soruda verilenlerin aksini yani

$$E > \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor + 1$$

olduğunu varsayalım. Turán teoremine göre,

$$E > \lfloor \frac{n^2}{2} (1 - \frac{1}{3}) \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$$

olduğundan çizgemizde mutlaka K_4 vardır. Ancak tek renkten üçlü, dörtlü ya da beşli döngü olması gerekiyor. Bu 4 noktayı ele alırsak: $V_1 V_2, V_2 V_3, V_3 V_4$ kenarları mavi, $V_1 V_3, V_1 V_4, V_2 V_4$ kenarları kırmızı olacak şekilde boyayabiliriz (fark etmeyeceğinden). Şimdi bu çizmeyi iki parçaya ayıralım. Bu 4 nokta A , bunların dışındaki $n - 4$ nokta B kümesi olsun. B 'deki herhangi bir nokta A 'daki en fazla 2 noktayla bağlanabileceğini biliyoruz. Şimdi, e_a, e_b, e_{ab} sayılarını şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} e_a &= A \text{ kümesindeki köşelerin kendi içlerindeki} \\ &\quad \text{kenarların sayısı} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{ab} &= A \text{ kümesinin köşeleri ile } B \text{ kümesinin} \\ &\quad \text{köşeleri arasındaki kenar sayısı} \\ &\leq 2(n - 4) \end{aligned}$$

$e_b = B$ kümesindeki kendi içlerindeki kenar sayısı olsun. $5 \leq n \leq 8$ için

$$e_b \leq \binom{n-4}{2}$$

olur.

$$e_a + e_b + e_{ab} \leq 6 + 2(n - 4) + \frac{(n - 4)(n - 5)}{2} \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$$

olur ($5 \leq n \leq 8$ için).

Ancak $E \geq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor + 1$ olduğunu varsaymıştık. Demek ki varsayımımız hatalı. $5 \leq n \leq 8$ için

$E \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ bulunur. Şimdi diğer n değerlerine bakalım ($n \geq 9$). Tümevarım yapmayı deneyelim. $n = 5, 6, 7, 8$ değerlerinin sağladığını bildiğimizden $E \leq \frac{n^2}{3}$ olduğunu ispatlamaya çalışırken $e_b \leq \frac{(n-4)^2}{3}$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda,

$$E = e_a + e_b + e_{ab} \leq 6 + 2(n - 4) + \frac{(n - 4)^2}{3}$$

olduğunu elde ederiz. Bu denklemi $E > \frac{n^2}{3}$, denklemlerle birleştirdiğimizde $5 > n$ buluruz. Ancak $n \geq 5$ olması gerekiyordu. Çelişki. Yani en baştaki $E \geq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor + 1$ varsayımımız yanlış. Buradan $E \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ bulunur.

Bu soruda hiçbir şekilde Turán Teoreminin kısıntısı bile verilmediği halde teoreminizi kullanabildik. Bunun gibi çeşitleri arttırabiliriz, ama bunu bu yazıda yapmak anlamsız olur. Başlangıç amacımızın Turán Teoremi'ni ispatlamak olduğunu da düşünecek olursak, biraz fazla ileri gittik gibi.

Turán Teoremi'ni her ne kadar sadece soru çözmekte kullandıysak da, matematiğin soru çözmek dışında birçok alanında, daha doğrusu çizmeye benzetilebilen neredeyse her alanında kullanabiliyoruz. Yani burada farklı örnekler vermemiz Turán Teoremi'nin bu kadar kısıtlı olduğu anlamına gelmez, teoreminizi hala birçok farklı amaç için kullanabiliriz. Örneğin soru hazırlamak bunlardan biri olabilir...

Kaynakça:

- [1] Borsenco, Ivan, "On a Turán Theorem for cyclic graphs", Mathematical Reflections, 3(2009).
- [2] A. Ilaşenco, M. Teleuca, "Elements Of Extremal Graph Theory", Articolle Ş1 Note Matematiche.
- [3] Andreescu, Titu, "Only Graphs, No Subgraphs!", Note of Titu and Harazi on Algebraic Inequalities.
- [4] www.artofproblemsolving.com
- [5] Borsenco, Ivan, " $K + k$ versus $K_{k+1} \setminus e$ ", Mathematical Reflections, 1(2008)